

**SUR LES AUTOMORPHISMES DE GROUPES LIBRES
ET DE GROUPES DE SURFACE**par **Frédéric PAULIN****INTRODUCTION**

Soient $m, n, g \in \mathbb{N}$; considérons les trois beaux groupes suivants : le groupe spécial linéaire entier $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, vu comme un archétype de sous-groupe arithmétique non uniforme; le groupe $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ des classes d'isotopies d'homéomorphismes préservant l'orientation d'une surface compacte connexe orientable Σ_g de genre g (appelé le *groupe modulaire*, ou groupe des difféotopies, et en anglais "Mapping class group", de Σ_g); et enfin le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, quotient du groupe des automorphismes d'un groupe libre \mathbb{F}_n de rang n par son sous-groupe des conjugaisons (appelé le *groupe des automorphismes extérieurs* de \mathbb{F}_n).

Le but de ce rapport est de décrire quelques-unes des analogies bien connues et fructueuses entre ces trois groupes, et surtout celles plus prononcées entre $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, qui ont été mises en évidence en particulier par les travaux de K. Vogtmann (voir les survols [87, 7, 23], dont le dictionnaire de M. Bestvina dans [7] et [10, §4.7]). Ces analogies sont des moteurs actuels de très nombreux résultats sur $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, dus en particulier à Y. Algom-Kfir, M. Bestvina, M. Bridson, M. Clay, B. Farb, M. Feighn, V. Guirardel, U. Hamenstädt, M. Handel, I. Kapovich, G. Levitt, M. Lustig, R. Martin, L. Mosher, A. Pettet, K. Vogtmann. Ces trois groupes apparaissent dans de nombreux domaines des mathématiques, et une liste exhaustive de leurs similitudes et différences actuellement démontrées ne serait pas raisonnable dans le format imparti. Après une première partie concernant les motivations, nous nous concentrerons surtout sur des beaux espaces contractiles sur lesquels ces groupes agissent avec des propriétés analogues, sur les propriétés communes de leurs sous-groupes, et sur les propriétés semblables (ou conjecturellement semblables) de leur géométrie asymptotique. Nous renvoyons par exemple à [88] pour une présentation de propriétés cohomologiques communes de ces trois groupes.

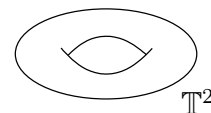
Le rédacteur remercie K. Vogtmann et G. Levitt pour des commentaires sur une version préliminaire de ce rapport, et ce dernier pour des conversations à l'origine de sa présentation.

1. POURQUOI ÉTUDIER CES GROUPES ?

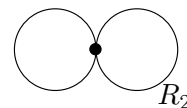
Pour tout groupe G , nous noterons $\text{Out}(G)$, et appellerons *groupe des automorphismes extérieurs* de G , le groupe quotient du groupe $\text{Aut}(G)$ des automorphismes de G par son sous-groupe (distingué) $\text{Int}(G) = \{i_g : h \mapsto ghg^{-1}, g \in G\}$ des *automorphismes intérieurs* de G . Puisque le groupe fondamental d'un espace topologique connexe par arcs pointé ne dépend pas du point base modulo automorphismes intérieurs, un choix de point base sera implicite, et toute application continue f entre deux espaces topologiques connexes par arcs induit un morphisme f_* entre leurs groupes fondamentaux, bien défini modulo conjugaison au but.

Pour tous $m, n, g \in \mathbb{N}$, nous allons nous intéresser au groupe des automorphismes extérieurs de trois groupes :

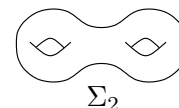
- un groupe abélien libre $\mathbb{Z}^m = \pi_1(\mathbb{T}^m)$ de rang m , où $\mathbb{T}^m = \prod_{i=1}^m \mathbb{T}$ est un tore de dimension m ;



- un groupe libre $\mathbb{F}_n = \pi_1(R_n)$ de rang n , où $R_n = \bigvee_{i=1}^n \mathbb{T}$ est un bouquet de n cercles pointés orientés ; nous noterons s_1, \dots, s_n les classes d'homotopies pointées de ces cercles, de sorte que \mathbb{F}_n soit l'ensemble des mots réduits en s_1, \dots, s_n et leurs inverses, muni de la loi de concaténation-réduction ;



- un groupe de surface $\pi_1(\Sigma_g)$, où $\Sigma_g = \Sigma_{g,0} = \#_{i=1}^g \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ est une somme connexe de g tores de dimension 2, et plus généralement $\Sigma_{g,p}$ est une surface lisse compacte connexe orientable de genre g privée des intérieurs de p disques fermés plongés deux à deux disjoints, pour tout $p \in \mathbb{N}$.



Voici trois raisons d'étudier ces groupes et leurs automorphismes.

i) Les groupes \mathbb{Z}^m et \mathbb{F}_n vérifient des propriétés universelles fort utiles : tout groupe (respectivement groupe abélien) muni d'une partie génératrice ordonnée à n (respectivement m) éléments est naturellement un quotient de \mathbb{F}_n (respectivement \mathbb{Z}^m). L'étude des groupes d'automorphismes de tels objets universels dans de telles catégories est un but en soi.

ii) Les surfaces et les homéomorphismes entre surfaces sont des objets fondamentaux en topologie de petite dimension.

Avant de justifier cette affirmation, rappelons les propriétés suivantes, dues à Dehn [28], Baer (1924), Nielsen (1927), Epstein (1966) : toute équivalence d'homotopie de Σ_g dans Σ_g est homotope à un homéomorphisme, et même à un difféomorphisme (voir par exemple [70]) ; deux homéomorphismes (ou difféomorphismes) de Σ_g sont homotopes si et seulement s'ils sont isotopes (c'est-à-dire homotopes à travers des homéomorphismes (ou difféomorphismes)), et si et seulement si leurs actions sur $\pi_1(\Sigma_g)$ diffèrent d'un automorphisme intérieur. La première propriété est remarquable, et son absence pour

le bouquet de cercles R_n (de nombreux graphes finis ont le même type d'homotopie que R_n , par exemple) est l'une des raisons pour lesquelles les propriétés de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ ont des preuves plus techniques que celles pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$. Nous noterons dans la suite $\text{Homeo}(\Sigma_g)$ le groupe topologique localement connexe par arcs des homéomorphismes de Σ_g , muni de la topologie compacte-ouverte, $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ son sous-groupe topologique d'indice 2 des homéomorphismes préservant l'orientation et $\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$ sa composante neutre, qui est son sous-groupe distingué des homéomorphismes isotopes à l'identité.

Décomposition de Heegaard. Pour toute variété topologique M compacte connexe orientable de dimension trois, il existe $g \in \mathbb{N}$ et $f : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ un homéomorphisme préservant l'orientation tel que, en notant H_g un corps à anses de bord Σ_g , la variété M soit homéomorphe au recollement $H_g \amalg_f H_g$ de deux copies de H_g le long de f . Notons (outre que g n'est pas unique) que l'on peut prendre pour H_g un voisinage régulier du 1-squelette d'une triangulation de M , et qu'un tel recollement ne dépend que de la classe d'isotopie de f , donc de la classe de f dans $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$ (voir par exemple [82]).

Surfaces incompressibles. Nous renvoyons par exemple à [54, 55] pour l'intérêt, de Haken à Thurston, des surfaces compactes connexes plongées dans une variété compacte connexe de dimension 3 et induisant une injection sur les groupes fondamentaux, en particulier des découpages le long de telles surfaces et des recollements par des homéomorphismes (dont seules les classes d'isotopie importent) le long des surfaces découpées.

Fibrés plats en surfaces. Soient M une variété connexe, $\widetilde{M} \rightarrow M$ un revêtement universel de groupe de revêtement Γ et $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homeo}(\Sigma_g)$ un morphisme. Alors l'espace quotient $P = \Gamma \backslash (\widetilde{M} \times \Sigma_g)$ (pour l'action diagonale de Γ) est une variété qui fibre sur M (via l'application de P dans $\Gamma \backslash \widetilde{M}$ induite par la première projection), de fibre Σ_g , qui, à homéomorphisme près, ne dépend que de la classe d'isotopie de ρ . Par exemple, si $M = \mathbb{S}^1$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$, la géométrie à la Thurston (voir par exemple [86]) de la variété P de dimension 3 est dictée par la classe de $\rho(1)$ dans $\text{Homeo}(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$. Lorsque M est une surface compacte privée d'un nombre fini de points, la compréhension des morphismes de $\pi_1(M)$ dans $\text{Homeo}(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$ est importante pour une bonne compréhension des surfaces complexes et des variétés symplectiques de dimension 4, dont la classification des fibrations de Lefschetz (voir les travaux de Donaldson, Gompf, Auroux, et par exemple [61]).

iii) Alors que \mathbb{Z}^m est abélien, les groupes \mathbb{F}_n et $\pi_1(\Sigma_g)$ sont des archétypes de groupes hyperboliques au sens de Gromov (voir par exemple [38]). En un certain sens, ce sont les seuls groupes hyperboliques dont les groupes des automorphismes extérieurs sont intéressants. Bien qu'il reste des recherches à effectuer sur les automorphismes des produits libres, nous avons en effet les deux résultats suivants. Par des travaux de Rips et du rédacteur (voir par exemple [76]), si Γ est un groupe hyperbolique qui ne se décompose pas en extension HNN ou produit amalgamé non trivial sur un groupe virtuellement monogène, alors $\text{Out}(\Gamma)$ est fini. Par des travaux de Sela et Levitt (voir [63]), si Γ est un groupe hyperbolique sans torsion librement indécomposable, alors il existe $k, \ell \in \mathbb{N}$, des

surfaces à bord (éventuellement vide) compactes connexes S_1, \dots, S_k , un sous-groupe G d'indice fini de $\text{Out}(\Gamma)$ et, en notant $\text{Homeo}(S_i, \partial S_i)$ le groupe topologique localement connexe par arcs des homéomorphismes de S_i préservant (globalement) chaque composante connexe du bord de S_i , une suite exacte

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow G \longrightarrow \prod_{i=1}^k \pi_0(\text{Homeo}(S_i, \partial S_i)) \longrightarrow 1 .$$

Le but de ce rapport est une étude comparative des trois groupes suivants :

- le groupe spécial linéaire entier $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$, d'indice 2 dans $\text{Out}(\mathbb{Z}^m) = \text{GL}_m(\mathbb{Z})$;
- le groupe modulaire $\text{Mod}(\Sigma_g)$ de Σ_g , défini indifféremment comme

$$\pi_0(\text{Homeo}_+(\Sigma_g)), \quad \text{Homeo}_+(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g), \quad \text{Diff}_+(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g) :$$

par les résultats initiaux du point (ii) ci-dessus, les morphismes évidents de $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$ dans $\pi_0(\text{Homeo}_+(\Sigma_g))$ et de $\text{Diff}_+(\Sigma_g)/\text{Diff}_0(\Sigma_g)$ dans $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$ sont des isomorphismes, et ce dernier groupe est d'indice 2 dans le groupe $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g) = \text{Homeo}(\Sigma_g)/\text{Homeo}_0(\Sigma_g)$, qui est isomorphe à $\text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$;

- le groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ des automorphismes extérieurs de \mathbb{F}_n , qui s'identifie avec le groupe des classes d'homotopie des équivalences d'homotopie du bouquet de cercles R_n par l'application induite sur le groupe fondamental.

La littérature sur ces groupes est abondante, et les analogies avec les groupes modulaires de surfaces sont une justification presque systématique des travaux sur $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$.

Les liens directs entre ces trois groupes sont pourtant peu nombreux. Notons que $\pi_1(\Sigma_{g,p})$ est un groupe libre de rang $2g + p - 1$ si $p > 0$, ce qui permet d'étudier certains (mais seulement certains) automorphismes extérieurs de \mathbb{F}_n , dits *géométriques*, tels qu'il existe $g, p \in \mathbb{N} - \{0\}$ vérifiant $n = 2g + p - 1$ et un homéomorphisme de $\Sigma_{g,p}$ induisant cet automorphisme extérieur sur le groupe fondamental, par des méthodes de topologie et géométrie des surfaces. Les groupes d'automorphismes de groupes d'Artin à angles droits permettent une certaine interpolation entre les propriétés des $\text{GL}_m(\mathbb{Z})$ et des $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, voir les travaux de Charney-Vogtmann [25].

En petite complexité, nous avons des isomorphismes classiques, le second étant dû à Nielsen (1918) :

$$\text{Mod}(\Sigma_1) \simeq \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{et} \quad \text{Out}(\mathbb{F}_2) \simeq \text{GL}_2(\mathbb{Z}) .$$

Le morphisme d'abélianisation $\mathbb{F}_n \rightarrow \mathbb{Z}^n$ induit un morphisme $\text{Out}(\mathbb{F}_n) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ qui est surjectif, de noyau de type fini (Magnus 1934), sans torsion (Baumslag-Taylor 1968), qui n'est pas de présentation finie si $n = 3$ (Krstić-McCool 1997), mais on ne sait toujours pas s'il est de présentation finie pour $n \geq 4$.

Le morphisme d'abélianisation $\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathbb{Z}^{2g}$ (ou l'action des homéomorphismes en homologie) induit un morphisme $\text{Mod}(\Sigma_g) \rightarrow \text{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$, d'image $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$, de noyau (appelé le *groupe de Torelli*) sans torsion, de type fini si $g \geq 3$ (Johnson 1983), qui n'est pas de type fini si $g = 2$ (McCullough-Miller 1986), mais on ne sait toujours pas s'il est de présentation finie pour $g \geq 3$.

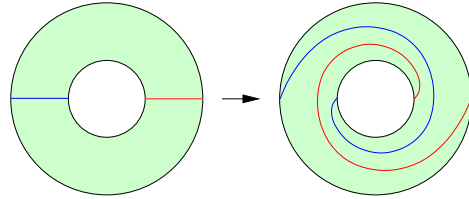
L'idée générale est que $\text{Mod}(\Sigma_g)$ et $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ ont assez peu de morphismes à valeurs dans des groupes linéaires ou venant de groupes linéaires. Si $n \geq 4$, le groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ n'admet pas de représentation linéaire fidèle (Formanek-Procesi 1992), mais on ne sait pas si $\text{Out}(\mathbb{F}_3)$ ni si $\text{Mod}(\Sigma_g)$ pour $g \geq 2$ en admet une ou pas. Toutefois, Grunewald et Lubotzky ont construit dans [39, Prop. 9.2] une famille assez riche de représentations linéaires (en dimension finie) de sous-groupes d'indice fini de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. Tout morphisme d'un sous-groupe Γ d'indice fini de $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ pour $m \geq 3$ (et plus généralement d'un réseau irréductible Γ d'un groupe de Lie réel connexe semi-simple de centre fini, sans facteur compact, de rang réel au moins 2), à valeur dans $\text{Mod}(\Sigma_g)$ (Farb-Mazur 1998) et dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ (Bridson-Wade 2010), est d'image finie.

2. ESPACES VIRTUELLEMENT CLASSIFIANTS

Les groupes $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$, $\text{Mod}(\Sigma_g)$, $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sont de type fini, engendrés respectivement :

- par les *transformations élémentaires* $\begin{cases} e_i \mapsto e_i + e_k \\ e_j \mapsto e_j \text{ si } j \neq i \end{cases}$ pour $1 \leq i \neq k \leq m$ où (e_1, \dots, e_m) est la base canonique de \mathbb{R}^m ;

- par les *twists de Dehn*, qui sont les classes d'isotopie des homéomorphismes de Σ_g valant l'identité en dehors d'un anneau $1 \times [0, 2\pi]$ plongé dans Σ_g , et valant $(e^{i\theta}, t) \mapsto (e^{i(\theta+t)}, t)$ sur cet anneau ($2g + 1$ twists de Dehn suffisent à engendrer $\text{Mod}(\Sigma_g)$, et ce nombre est minimum (Humphries 1979), mais $\text{Mod}(\Sigma_g)$ admet (Wajnryb 1996) une paire génératrice) ;



- par les *transformations de Nielsen*, qui outre les automorphismes définis par $s_j \mapsto s_{\sigma(j)}$ où $1 \leq j \leq n$, pour les $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, et par $\begin{cases} s_1 \mapsto s_1^{-1} \\ s_j \mapsto s_j \text{ si } 2 \leq j \leq n \end{cases}$, sont ceux

définis par $\begin{cases} s_i \mapsto s_i s_k \\ s_j \mapsto s_j \text{ si } 1 \leq j \leq n, j \neq i \end{cases}$ pour $1 \leq i \neq k \leq n$ (voir par exemple [66]), qui redonnent les transformations élémentaires par abélianisation.

En fait, ces groupes vérifient des propriétés de finitude bien plus importantes. Nous allons prendre comme fil directeur de cette partie 2 le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. — *Les groupes $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$, $\text{Mod}(\Sigma_g)$, $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sont de présentation finie, et de dimension cohomologique virtuelle respectivement $\frac{m(m-1)}{2}$, $4g - 5$, $2n - 3$.*

Rappelons que la *dimension cohomologique virtuelle* d'un groupe virtuellement sans torsion est la dimension cohomologique commune de ses sous-groupes d'indice fini sans torsion, qu'elle est minorée par le rang d'un sous-groupe nilpotent sans torsion, et majorée par la dimension d'un CW-complexe contractile localement fini sur laquelle le groupe agit proprement avec quotient fini (voir par exemple [24]). Avec un peu de chance

(ce qui sera le cas pour $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ mais pas pour $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$), une stratégie de minoration-majoration permet ainsi le calcul de dimensions cohomologiques virtuelles.

La première assertion est respectivement : due à Nielsen (si $n = 3$) et à de Séguier [83] (voir aussi les écrits de Magnus (1934), Steinberg (1962), Milnor [69, Coro. 10.3 & Theo. 10.5]) ; attribuée à McCool (1975) bien que le résultat découle du fait que l'espace des modules des courbes complexes lisses de genre g soit une variété quasi-projective comme montré par Baily (1960), avec présentation explicitable par Hatcher-Thurston (1980) et explicitée par Wajnryb (1983, 1999) ; et due à Nielsen (1924), avec une présentation plus longue de démonstration plus courte par McCool (1974). La seconde assertion est due respectivement à Voronoï (1907) (et à Borel-Serre (1973) dans un cadre plus général), à Harer (1986), et à Culler-Vogtmann (1986), ce dernier cas par la construction dont nous allons parler.

Nous allons construire des espaces topologiques localement compacts contractiles sur lesquels ces trois groupes agissent proprement, et indiquer comment les modifier en des CW-complexes localement finis contractiles sur lesquels ces groupes agissent proprement avec quotient fini. Ceci implique que ces groupes sont de présentation finie (et même de type VFL, voir [24, page 200]), et fournit une majoration de leur dimension cohomologique virtuelle. Nous donnerons (en indiquant le lien avec les définitions usuelles) des définitions analogues, en tant qu'espaces de modules de structures marquées, et en tant qu'espaces d'actions isométriques d'un groupe fixé.

Si Γ est un groupe et \mathcal{E} un ensemble (de classes d'isométrie équivariante) d'espaces métriques munis d'une action isométrique de Γ , la *topologie de Gromov équivariante* (voir [75]) est l'unique topologie sur \mathcal{E} dont un système fondamental de voisinages d'un élément quelconque X est $(V_{K,F,\epsilon})_{K,F,\epsilon}$ où $\epsilon > 0$, F et K sont des parties finies de Γ et X respectivement, et $V_{K,F,\epsilon}$ est l'ensemble des $Y \in \mathcal{E}$ tels qu'il existe une partie finie K' de Y et une bijection $x \mapsto x'$ de K dans K' telles que

$$\forall \gamma \in F, \forall x, y \in K, \quad |d(x, \gamma y) - d(x', \gamma y')| < \epsilon :$$

ainsi deux éléments de \mathcal{E} sont « proches » s'ils ont de « grandes » parties finies qui sont « presque » isométriques de manière « presque » équivariante par une « grande » partie finie de Γ .

Pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $X \in \mathcal{E}$, l'application $\mathrm{dis}_\gamma : X \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $\mathrm{dis}_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$ s'appelle la *fonction déplacement* de γ dans X , et sa borne inférieure $\ell_X(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x) \in [0, +\infty[$ s'appelle la *distance de translation* de γ dans X ; elle ne dépend que de la classe de conjugaison de γ dans Γ . Notons \mathbb{PR}_+^Γ l'espace topologique quotient de l'espace topologique produit $[0, +\infty[^{\mathrm{Int}(\Gamma) \setminus \Gamma}$ privé de l'application nulle 0, par l'action de \mathbb{R}_+^* par homothéties. Nous appellerons *topologie des distances de translation* la topologie sur \mathcal{E} la moins fine rendant continue l'application de \mathcal{E} dans \mathbb{PR}_+^Γ qui à $X \in \mathcal{E}$ associe la classe d'homothétie de la fonction distance de translation ℓ_X , si $\ell_X \neq 0$ pour tout $X \in \mathcal{E}$. L'action par précomposition de $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ sur l'ensemble des fonctions constantes sur les classes de conjugaison de Γ dans $[0, +\infty[$ induit une action à droite de $\mathrm{Out}(\Gamma)$ sur \mathbb{PR}_+^Γ .

2.1. L'espace symétrique \mathcal{E}_m de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$

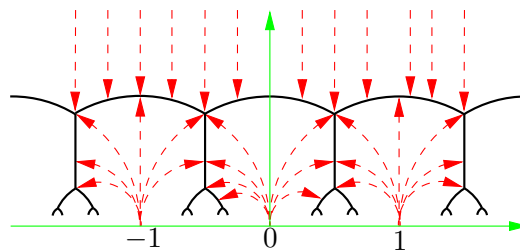
L'espace symétrique \mathcal{E}_m de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est l'un des espaces suivants :

- (i) l'ensemble \mathcal{E}'_m des classes d'isométrie équivariante d'actions, propres et libres (donc cocompactes) et de covolume 1, de \mathbb{Z}^m sur \mathbb{R}^m par isométries (donc par translations), muni de la topologie de Gromov équivariante et de l'action à droite de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ par précomposition ;
- (ii) l'ensemble \mathcal{E}''_m des *modules des tores plats marqués* de dimension m de volume 1 – c'est-à-dire l'ensemble des couples (X, f) , où X est une variété plate de volume 1 et $f : \mathbb{T}^m \rightarrow X$ un difféomorphisme (appelé *marquage*), quotienté par la relation d'équivalence $(X, f) \sim (X', f')$ si $f' \circ f^{-1} : X \rightarrow X'$ est isotope à une isométrie –, muni de l'action à droite par précomposition de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, vu comme le groupe des difféomorphismes linéaires préservant l'orientation de \mathbb{T}^m ;
- (iii) l'espace homogène $\mathrm{SO}(m) \backslash \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$, muni de la métrique riemannienne quotient d'une métrique riemannienne sur $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ invariante à droite par $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ et à gauche par $\mathrm{SO}(m)$, et de l'action à droite par translations à droite de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ (et même de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$).

L'application, qui à un tore plat marqué (X, f) associe la classe de conjugaison de la représentation d'holonomie $\rho : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^m)$ d'une application développante (au sens d'Ehresmann, voir par exemple [86, §3.4]) de la métrique plate sur $\mathbb{T}^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$ image réciproque de la métrique plate de X par le marquage f , induit une bijection $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariante de \mathcal{E}''_m dans \mathcal{E}'_m . L'action à gauche par postcomposition de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ sur l'ensemble des actions propres et libres de \mathbb{Z}^m sur \mathbb{R}^m par translations, qui est continue et simplement transitive, induit un homéomorphisme $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariant de $\mathrm{SO}(m) \backslash \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ dans \mathcal{E}'_m . Nous ne parlerons pas des définitions de \mathcal{E}_m comme espace des classes d'homothéties de formes quadratiques définies positives sur un espace vectoriel réel de dimension m , ni comme espace des ellipsoïdes de volume 1 et de centre 0 dans l'espace euclidien \mathbb{R}^m .

La variété lisse $\mathrm{SO}(m) \backslash \mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est localement compacte et contractile (car difféomorphe à $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}-1}$ par la décomposition polaire). Voronoï [89] (ou Ash [1] dans un cadre plus général, mais dont la démonstration utilise la connaissance de la dimension cohomologique virtuelle de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$) a montré que cette variété se rétracte par déformation forte $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariante sur un CW-complexe plongé de dimension $\frac{m(m-1)}{2}$, invariant et de quotient fini. Or cette dimension est le rang du sous-groupe unipotent triangulaire supérieur de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, qui est nilpotent sans torsion. Le groupe linéaire de type fini en caractéristique nulle $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ étant virtuellement sans torsion par le lemme de Selberg, la stratégie susmentionnée permet donc d'obtenir que la dimension cohomologique virtuelle de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ est $\frac{m(m-1)}{2}$.

Lorsque $m = 2$, la rétraction du demi-plan supérieur \mathcal{E}_2 sur l'arbre de Bass-Serre de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est facile à expliciter (voir par exemple [84, page 53]).



L'application de \mathcal{E}'_m dans $\mathbb{PR}_+^{\mathbb{Z}^m}$ définie par les distances de translation est un homéomorphisme $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariant sur son image. Celle-ci est relativement compacte, et Haettel [43] a montré que son adhérence est homéomorphe, de manière $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ -équivariante, à la compactification de Satake (voir [81]) associée à la représentation linéaire tautologique de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^m (c'est-à-dire à l'adhérence, dans l'espace projectif des matrices réelles symétriques m - m , de l'image de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ par l'application $\gamma \mapsto \mathbb{R}^t \gamma \gamma$), donc est contractile.

2.2. L'espace de Teichmüller $\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ de Σ_g

Fixons une orientation sur Σ_g et un plan hyperbolique réel $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$. Si $g \geq 2$, l'espace de Teichmüller $\mathrm{Teich}(\Sigma_g)$ de Σ_g est l'un des espaces suivants :

- (i) l'ensemble \mathcal{T}' des classes d'isométrie équivariante d'actions propres et libres (donc cocompactes) de $\pi_1(\Sigma_g)$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, muni de la topologie de Gromov équivariante et de l'action à droite de $\mathrm{Mod}_{\pm}(\Sigma_g)$ induite par la précomposition par l'action sur le groupe fondamental des homéomorphismes de Σ_g ;
- (ii) l'ensemble \mathcal{T}'' des *modules de surfaces hyperboliques marquées* – c'est-à-dire l'ensemble des couples (X, f) où X est une surface hyperbolique, c'est-à-dire munie d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante -1 et $f : \Sigma_g \rightarrow X$ un homéomorphisme appelé *marquage*, quotienté par la relation d'équivalence $(X, f) \sim (X, f')$ si $f' \circ f^{-1} : X \rightarrow X'$ est isotope à une isométrie –, muni de l'action à droite de $\mathrm{Mod}_{\pm}(\Sigma_g)$ induite par la précomposition du marquage par les homéomorphismes de Σ_g ;
- (iii) l'espace \mathcal{T}''' des classes d'isotopie de métriques hyperboliques (ou de structure analytique complexe induisant l'orientation de Σ_g) sur Σ_g , muni de la topologie quotient de la topologie C^∞ sur l'espace des sections lisses du fibré des formes bilinéaires (ou des endomorphismes) sur Σ_g , et de l'action à droite de $\mathrm{Mod}_{\pm}(\Sigma_g)$ induite par les images réciproques de ces sections par les difféomorphismes de Σ_g .

L'application de \mathcal{T}'' dans \mathcal{T}''' , qui au module d'une surface hyperbolique marquée (X, f) associe la classe d'isotopie de $F^* \sigma_X$, où σ_X est la métrique riemannienne de X et $F : \Sigma_g \rightarrow X$ est un difféomorphisme homotope à f , est une bijection $\mathrm{Mod}_{\pm}(\Sigma_g)$ -équivariante. L'application de \mathcal{T}''' dans \mathcal{T}' , qui à la classe d'isotopie d'une métrique hyperbolique σ sur Σ_g associe la classe de conjugaison de la représentation d'holonomie $\rho_\sigma : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2)$ d'une application développante de σ est un homéomorphisme $\mathrm{Mod}_{\pm}(\Sigma_g)$ -équivariant (voir par exemple [78]). Notons que l'espace quotient de

$\text{Teich}(\Sigma_g)$ par $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)$ est l'espace des classes d'isométrie de métriques hyperboliques sur Σ_g , qui s'identifie, par l'application qui à une structure conforme sur Σ_g associe sa métrique hyperbolique de Poincaré, à l'espace des modules des structures de courbe complexe lisse sur Σ_g . Nous ne parlerons pas ici des aspects algébriques et arithmétiques de ces espaces de module à la Grothendieck, Baily, Deligne-Mumford, Drinfeld. Par manque de place (et pour faire plaisir à Grothendieck, qui souhaitait « éliminer un jour complètement l'Analyse de la théorie de l'espace de Teichmüller qui devrait être purement géométrique »), nous n'aborderons pas non plus ses propriétés d'analyse complexe, voir par exemple [37, 72].

THÉORÈME 2.2 (Thurston (voir par exemple [33])). — *L'application de \mathcal{T}' dans $\mathbb{PR}_+^{\pi_1(\Sigma_g)}$ définie par les distances de translation est un homéomorphisme $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)$ -équivariant sur son image. Celle-ci est relativement compacte, ouverte dans son adhérence, et d'adhérence homéomorphe à la boule unité fermée $\overline{\mathbb{B}_{6g-6}}$ de \mathbb{R}^{6g-6} , donc contractile.*

Comme nous avons vu que le groupe de Torelli est sans torsion, et puisque $\text{Sp}_{2g}(\mathbb{Z})$ est virtuellement sans torsion par le lemme de Selberg, le groupe $\text{Mod}(\Sigma_g)$ est virtuellement sans torsion.

La stratégie de calcul de la dimension cohomologique virtuelle employée pour $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ et $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ ne fonctionne pas pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$: la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ est strictement plus grande que le rang maximal d'un sous-groupe nilpotent sans torsion de $\text{Mod}(\Sigma_g)$, et, malgré plusieurs tentatives, il n'a toujours pas été construit de CW-complexe invariant de la bonne dimension contenu dans $\text{Teich}(\Sigma_g)$ sur lequel cet espace se rétracte par déformation forte équivariante. Pour montrer que la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ est $4g - 5$, Harer [47] utilise alors la suite exacte, pour x un point fixé de Σ_g ,

$$1 \longrightarrow \pi_1(\Sigma_g, x) \longrightarrow \pi_0(\text{Homeo}_+(\Sigma_g, x)) \longrightarrow \text{Mod}(\Sigma_g),$$

ainsi que la stratégie de rétraction pour l'espace de Teichmüller de $\Sigma_g - \{x\}$ (voir aussi la formulation hyperbolique par Bowditch-Epstein (1988)), et un lemme de Bieri-Eckmann (1973) d'additivité par suite exacte de la dimension cohomologique des groupes sans torsion à dualité de Poincaré (notion sur laquelle nous reviendrons plus loin).

Remarque. Une autre manière de construire la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller est la suivante. Soit Γ un groupe hyperbolique au sens de Gromov, non virtuellement monogène. Pour tout automorphisme ϕ de Γ , notons $\hat{\phi}$ l'unique homéomorphisme ϕ -équivariant du bord à l'infini $\partial_\infty \Gamma$ de Γ (pour une partie génératrice de Γ fixée indifférente). Notons $\text{Curr}(\Gamma)$ l'espace (introduit par Bonahon (1986) en généralisant une notion de Sullivan) des *courants géodésiques* de Γ , c'est-à-dire des mesures boréliennes régulières positives, invariantes par l'action diagonale de Γ et par l'involution $(x, y) \mapsto (y, x)$, sur l'espace $\partial_\infty^2 \Gamma$ des couples de points distincts de $\partial_\infty \Gamma$, muni de la topologie vague et de l'action à gauche (commutant avec celle de

\mathbb{R}_+^* par homothéties) de $\text{Out}(\Gamma)$ définie par $([\phi], \mu) \mapsto (\widehat{\phi} \times \widehat{\phi})_* \mu$. Notons $\mathbb{P}\text{Curr}(\Gamma)$ son espace quotient par les homothéties. Pour tout $\gamma \in \Gamma - \{e\}$, notons μ_γ le courant géodésique, somme des masses de Dirac unités aux couples de points fixes des conjugués de γ et de son inverse. L'ensemble des multiples rationnels des μ_γ pour $\gamma \in \Gamma - \{e\}$ est dense dans $\text{Curr}(\Gamma)$ et $\mathbb{P}\text{Curr}(\Gamma)$ est métrisable compact (voir [17] pour ces deux assertions).

Pour tout espace métrique X géodésique (voir définition ci-dessous) complet localement compact $\text{CAT}(-1)$ (voir par exemple [21]), muni d'une action isométrique propre de Γ , de quotient compact, notons $f_X : \partial_\infty X \rightarrow \partial_\infty \Gamma$ l'unique homéomorphisme Γ -équivariant ; notons d_x la *distance visuelle* sur le bord à l'infini de X vue de $x \in X$, définie par $d_x(\xi, \eta) = e^{\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} (d(\xi_t, \eta_t) - d(x, \xi_t) - d(x, \eta_t))}$, où $t \mapsto \xi_t$ et $t \mapsto \eta_t$ sont les rayons géodésiques de x à $\xi \in \partial_\infty X$ et de x à $\eta \in \partial_\infty X$; notons $(\mu_x)_{x \in X}$ une *densité de Patterson-Sullivan* de Γ (c'est-à-dire une (unique à homothétie près) famille de mesures positives finies sur le bord à l'infini de X telles que $\gamma_* \mu_x = \mu_{\gamma x}$ et $\frac{d\mu_x}{d\mu_y}(\xi) = e^{-\delta_\Gamma \beta_\xi(x, y)}$ pour tous les $\gamma \in \Gamma$ et $x, y \in X$, où $\delta_\Gamma = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \text{Card}(\Gamma x \cap B(x, r))$ et $\beta_\xi(x, y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(x, z_t) - d(y, z_t)$ où $t \mapsto z_t$ est un rayon géodésique convergeant vers $\xi \in \partial_\infty X$) ; enfin, notons m_X la mesure sur $\partial_\infty^2 X$ définie par $dm_X(\xi, \eta) = \frac{d\mu_x(\xi) d\mu_x(\eta)}{d_x(\xi, \eta)^{2\delta}}$.

Soit \mathcal{E} un ensemble (de classes d'isométrie équivariante) d'actions isométriques de Γ sur des espaces métriques, invariant par homothéties et précomposition par $\text{Out}(\Gamma)$, et \mathcal{E}_0 son sous-ensemble des actions propres, de quotient compact, sur des espaces géodésiques complets localement compacts $\text{CAT}(-1)$. Notons $\Theta : \mathcal{E}_0 \rightarrow \text{Curr}(\Gamma)$ l'application qui à $X \in \mathcal{E}_0$ associe le courant géodésique $(f_X \times f_X)_* m_X$, qui est équivariante (au sens que $\Theta(xa) = a^{-1} \Theta(x)$ pour tous $x \in \mathcal{E}_0$ et $a \in \text{Out}(\Gamma)$). Un *accouplement action-courant* est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \times \text{Curr}(\Gamma) \rightarrow [0, +\infty[$ continue, homogène de degré 1 en chaque variable, telle que $\langle X, \mu_\gamma \rangle = \ell_X(\gamma)$ pour tous $X \in \mathcal{E}$ et $\gamma \in \Gamma$ (elle est unique si elle existe). Bonahon a montré [16], en prenant $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = \mathbb{R}_+^* \mathcal{T}'$, outre l'existence d'un accouplement action-courant, que l'application Θ induit un homéomorphisme équivariant de $\text{Teich}(\Sigma_g)$ sur son image dans $\mathbb{P}\text{Curr}(\pi_1(\Sigma_g))$, et que l'adhérence de son image est de manière équivariante homéomorphe à la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller de Σ_g .

2.3. L'outre-espace CV_n de Culler-Vogtmann

Avant de définir l'espace analogue pour $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ à l'espace symétrique \mathcal{E}_m pour $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ et à l'espace de Teichmüller $\text{Teich}(\Sigma_g)$ pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$, rappelons quelques définitions sur les arbres réels, introduits par Tits (1977), puis par Morgan et Shalen (1985) (voir par exemple [76] et ses références, dont les survols de Shalen, Morgan, Bestvina).

Un espace métrique T est *géodésique* si, pour tous x, y dans T , il existe une application isométrique d'un intervalle réel $[a, b]$ dans T envoyant a sur x et b sur y . Une *homothétie* d'un espace métrique (X, d) dans un autre (X', d') est une application $f : X \rightarrow X'$ telle qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $d'(f(x), f(y)) = \lambda d(x, y)$ pour tous x, y dans X . Le

groupe \mathbb{R}_+^* agit par homothéties par $(\lambda, (X, d)) \mapsto (X, \lambda d)$ sur la collection des espaces métriques. Un *graphe métrique* X est un espace métrique géodésique homéomorphe à la réalisation géométrique d'un 1-complexe simplicial connexe sans sommet terminal. Un *sommet* d'un graphe métrique est un point séparant chacun de ses voisinages en au moins trois composantes connexes ; une *arête* est l'adhérence d'une composante connexe du complémentaire du lieu des sommets. Un *arbre métrique* est un graphe métrique simplement connexe.

Un *arbre réel* est un espace métrique géodésique uniquement connexe par arcs. Une action isométrique d'un groupe Γ sur un arbre réel T est :

- *minimale* si elle n'a pas de sous-arbre invariant non vide propre,
- *petite* si le stabilisateur de tout arc non trivial est monogène,
- *très petite* si elle est petite, si aucun stabilisateur non trivial d'un arc non trivial n'est strictement contenu dans un groupe monogène, et si aucun élément non trivial de Γ ne fixe de triplet de points de T non contenus dans un arc.

Notons que Skora (1996) a montré que le bord de Thurston de l'espace de Teichmüller est exactement l'ensemble des classes d'homothétie des fonctions distances de translation des actions isométriques minimales petites de $\pi_1(\Sigma_g)$ sur des arbres réels.

Si $n \geq 2$, l'*outre-espace* CV_n de Culler-Vogtmann, construit dans [27], est l'un des espaces suivants :

- (i) l'espace CV'_n quotient, par l'action de \mathbb{R}_+^* par homothéties, de l'ensemble cv_n des classes d'isométrie équivariante d'actions isométriques, libres et minimales (donc cocompactes) de \mathbb{F}_n sur des arbres métriques au sens ci-dessus, muni de la topologie de Gromov équivariante et de l'action à droite de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ induite par la précomposition des actions par $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$;
- (ii) l'ensemble CV''_n des *modules de graphes métriques marqués* – c'est-à-dire l'ensemble des couples (X, f) où X est un graphe métrique compact et $f : R_n \rightarrow X$ une équivalence d'homotopie (appelée *marquage*), quotienté par la relation d'équivalence $(X, f) \sim (X', f')$ si $f' \circ f^{-1} : X \rightarrow X'$ est homotope à une homothétie –, muni de l'action à droite de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ induite par la précomposition du marquage par les équivalences d'homotopie de R_n .

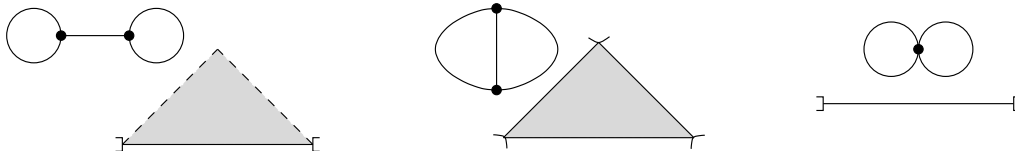
L'application qui au module d'un graphe métrique marqué (X, f) associe la classe de l'action de \mathbb{F}_n sur l'espace total \tilde{X} d'un revêtement universel de X (qui est un arbre métrique, en demandant que ce revêtement soit localement isométrique), obtenue en précomposant par $f_* : \mathbb{F}_n = \pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(X)$ l'action du groupe fondamental de X sur \tilde{X} , est une bijection équivariante de CV''_n dans CV'_n . Nous ne parlerons pas de la définition de Hatcher-Vogtmann de CV_n utilisant des classes d'isotopie de sphères de dimension 2 dans une somme connexe de n copies de 1×2 , pourtant très bien adaptée pour certaines applications.

THÉORÈME 2.3. — *L'application de CV'_n dans $\mathbb{PR}_+^{\mathbb{F}_n}$ définie par les distances de translation est un homéomorphisme sur son image. Celle-ci est contractile, d'adhérence*

compacte et contractile, formée exactement des classes d’homothétie des fonctions distances de translation des éléments de l’espace \overline{cv}_n des classes d’isométrie équivariante d’actions isométriques minimales très petites de \mathbb{F}_n sur les arbres réels.

Cet énoncé est une combinaison de résultats de Culler-Vogtmann (1986), Culler-Morgan (1987), Paulin (1989), Cohen-Lustig (1995), Bestvina-Feighn (non publié), Skora et indépendamment Steiner (non publiés). Point clef de l’article original [27], la démonstration actuellement la plus malléable (en ce qui concerne les actions de groupes sur les arbres) de la contractibilité de CV_n qui montre celle de son adhérence est sans doute celle de [42], suivant les idées de Skora (aussi reprises par Forester et Clay).

Donnons une idée de cette démonstration. Pour tout élément $T \in cv_n$, notons $\tilde{C}(T)$ le sous-espace des $T' \in \overline{cv}_n$ tels que T' soit homéomorphe, de manière équivariante, à l’espace quotient de T par l’écrasement en un point de chaque composante connexe d’une forêt invariante de T , et $C(T)$ l’image dans CV_n de $\tilde{C}(T) \cap cv_n$. En faisant varier de manière équivariante les longueurs des arêtes de T (certaines pouvant devenir nulles), $\tilde{C}(T)$ s’identifie ainsi au cône époiné sur un simplexe de dimension au plus $3n - 4$, et $C(T)$ à ce simplexe privé de certaines facettes fermées. La topologie ainsi définie sur $\tilde{C}(T)$ coïncide clairement avec la topologie de Gromov équivariante, et $\tilde{C}(T)$ est donc contractile (de manière équivariante par les homothéties). Par exemple, si T est un revêtement universel de l’un des trois (à homéomorphisme près) graphes métriques de groupe fondamental isomorphe à \mathbb{F}_2 , alors $C(T)$ est donné par la figure ci-dessous : un triangle privé de deux côtés fermés pour le graphe des haltères, un triangle privé de ses sommets pour le graphe Θ , un intervalle ouvert pour R_2 .



Soit T_0 un revêtement universel de R_n , muni de l’action du groupe fondamental $\mathbb{F}_n = \pi_1(R_n)$, et de la distance géodésique rendant chacune de ses arêtes isométrique à $[0, 1]$. Munissons \overline{cv}_n de la topologie de Gromov équivariante et de l’action par homothéties de \mathbb{R}_+^* . L’idée de Skora est d’explicitier une rétraction par déformation forte r de \overline{cv}_n sur $\tilde{C}(T_0)$, préservant cv_n et commutant avec l’action par homothéties de \mathbb{R}_+^* , ce qui conclut.

Si T et T' sont des arbres réels munis d’une action isométrique d’un groupe G , appelons *morphisme* de T dans T' une application équivariante telle que tout arc de T puisse être subdivisé en un nombre fini de sous-arcs, en restriction auxquels f est isométrique. Puisque le graphe d’un morphisme est un espace métrique muni d’une action isométrique de G , nous munirons de la topologie de Gromov équivariante tout ensemble de morphismes entre éléments de \overline{cv}_n . Construisons tout d’abord une application continue $T \mapsto f_T$ de \overline{cv}_n dans l’espace des morphismes entre un élément de $\tilde{C}(T_0)$ et un élément de \overline{cv}_n .

Si γ est une isométrie d’un arbre réel T , notons $A_T(\gamma) = \{x \in T : d(x, \gamma x) = \ell_T(\gamma)\}$: alors $A_T(\gamma)$ est l’ensemble des points fixes de γ si celui-ci est non vide, et sinon $A_T(\gamma)$ est isométrique à \mathbb{R} et γ translate sur $A_T(\gamma)$ de la distance $\ell_T(\gamma) > 0$. Rappelons que s_1 et s_2 sont les deux premiers éléments de la famille génératrice libre fixée de \mathbb{F}_n . Pour tout $T \in \overline{cv}_n$, notons p_T le milieu de l’arc connectant entre $A_T(s_1)$ et $A_T(s_2)$ s’ils sont disjoints, et le milieu de leur intersection (qui est un arc de longueur au plus $\ell_T(s_1) + 2\ell_T(s_2)$ car $[s_1, s_2]$ et $[s_1, s_2^2]$

engendrent un groupe libre de rang 2) sinon. Soit p_* le sommet de T_0 intersection de $A_{T_0}(s_1)$ et $A_{T_0}(s_2)$. Notons $T_0(T)$ l'unique élément de $\tilde{C}(T_0)$ tel que l'arête entre p_* et $s_i p_*$ soit de longueur $d_T(p_T, s_i p_T)$ (non nulle si $T \in \overline{cv}_n$). Définissons alors $f_T : T_0(T) \rightarrow T$ comme l'unique morphisme tel que $f_T(p_*) = p_T$. Il dépend continuellement de T , est équivariant pour l'action par homothéties de \mathbb{R}_+^* , et vaut l'identité sur $\tilde{C}(T_0)$.

Maintenant, pour construire la rétraction $r : [0, 1] \times \overline{cv}_n \rightarrow \overline{cv}_n$ voulue, pour tout $t \in [0, 1]$ et T dans \overline{cv}_n , notons $\sim_{t,T}$ la relation d'équivalence sur $T_0(T)$ définie par $x \sim_{t,T} y$ si et seulement si $f_T(x) = f_T(y)$ et $d_T(f_T(x), f_T(z)) \leq -\log(1-t)$ pour tout z dans l'arc entre x et y . Notons alors $r(t, T)$ l'ensemble quotient $T_0(T)/\sim_{t,T}$ muni de l'action quotient de \mathbb{F}_n et de la plus grande distance rendant la projection canonique 1-lipschitzienne. L'application r convient (voir par exemple [41]).

Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.1 dans le cas de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$. Comme le noyau du morphisme canonique $\text{Out}(\mathbb{F}_n) \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ est sans torsion, et puisque $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ est virtuellement sans torsion par le lemme de Selberg, le groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est virtuellement sans torsion, et sa dimension cohomologique virtuelle est donc bien définie.

La topologie de Gromov équivariante sur CV_n coïncide (voir par exemple [42]) avec la topologie faible définie par la famille des sous-espaces $C(T)$ pour $[T] \in \text{CV}_n$, et CV_n se rétracte de manière équivariante par déformation forte sur la réalisation géométrique de l'ensemble des $C(T)$ partiellement ordonné par l'inclusion (voir [27]). De plus, le quotient de ce complexe simplicial (qui est donc contractile) par $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ n'a qu'un nombre fini de cellules, et il est de dimension $2n-3$, par un calcul de la caractéristique d'Euler d'un graphe métrique trivalent. Ceci montre que $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est de présentation finie (et même de type VFL), et que sa dimension cohomologique virtuelle est au plus $2n-3$.

Notons que $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ contient un sous-groupe abélien libre de rang $2n-3$, l'image dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ du sous-groupe de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ engendré par les $2n-2$ automorphismes définis par $\begin{cases} s_i \mapsto s_i s_1 \\ s_j \mapsto s_j \text{ si } 1 \leq j \neq i \leq n \end{cases}$ et $\begin{cases} s_i \mapsto s_1 s_i \\ s_j \mapsto s_j \text{ si } 1 \leq j \neq i \leq n \end{cases}$ pour $2 \leq i \leq n$. Ceci termine le calcul de la dimension cohomologique virtuelle de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$.

Remarque. Alors que la composante neutre du groupe des isométries de l'espace symétrique \mathcal{E}_m , qui est $\text{PSL}_m(\mathbb{R})$, est bien plus grosse que $\text{PSL}_m(\mathbb{Z})$ si $m \geq 2$, Royden (1971) a montré que, si $g \geq 2$, le groupe des isométries de $\text{Teich}(\Sigma_g)$ pour la distance de Teichmüller est $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)$. De même, Bridson et Vogtmann (2001) ont montré que l'action de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur CV_n induit un isomorphisme de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ dans le groupe des automorphismes simpliciaux du complexe simplicial décrit ci-dessus sur lequel se rétracte CV_n , si $n \geq 3$.

3. STRUCTURES DES SOUS-GROUPES

Supposons $m, g, n \geq 2$. Nous prendrons cette fois-ci comme fil directeur de l'étude des sous-groupes de nos trois groupes le résultat suivant.

THÉORÈME 3.1. — *Les groupes $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ vérifient l'alternative de Tits : tout sous-groupe non virtuellement résoluble contient un sous-groupe libre de rang 2.*

Ce résultat a été démontré respectivement : par Tits (1972), voir [48, 5] pour d'excellentes expositions – et plus généralement pour tous les groupes linéaires Γ en caractéristique nulle, et sans hypothèse sur la caractéristique si Γ est supposé de type fini –; par Ivanov (1984) et McCarthy (1985); et par Bestvina-Feighn-Handel (2000, 2005). Bien sûr, vérifier l'alternative de Tits n'est pas l'apanage de ces trois groupes, voir par exemple les groupes hyperboliques de Gromov, le groupe des automorphismes polynomiaux du plan affine complexe (Lamy 2001), ou le groupe de Crémone des transformations birationnelles du plan projectif complexe (Cantat 2007). Dans le cas de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, des précisions suivantes, remarquablement semblables, ont été apportées respectivement par Birman-Lubotzky-McCarthy (1983) et Ivanov (1984), et par Bestvina-Feighn-Handel (2004).

THÉORÈME 3.2. — *Tout sous-groupe virtuellement résoluble de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ contient un sous-groupe abélien libre de rang au plus $3g - 3$ et d'indice au plus 3^{4g^2} .*

THÉORÈME 3.3. — *Tout sous-groupe virtuellement résoluble de $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ contient un sous-groupe abélien libre de rang au plus $2n - 3$ et d'indice au plus 3^{5n^2} .*

Nous renvoyons à [34] pour une description effective de tous les groupes du théorème 3.3. Comme le montre la longueur des articles [12, 13, 14], les démonstrations pour le groupe $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ sont remarquablement plus techniques que pour les deux autres groupes, et des phénomènes nouveaux apparaissent. Un dénominateur commun est l'étude de la dynamique des éléments individuels sur les compactifications des espaces construits dans la partie 2, ou des variations. Nous nous concentrerons sur les éléments respectivement loxodromiques, pseudo-Anosov, complètement irréductibles (au sens que nous allons définir) de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ et $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$, dont la dynamique est la plus simple, mais qui sont génériques au sens suivant : une fois fixée une partie génératrice finie, la proportion d'éléments de ces groupes qui sont dans la boule de rayon N pour la distance des mots et qui sont respectivement de polynôme caractéristique irréductible sur \mathbb{Z} , pseudo-Anosov et complètement irréductibles, tend vers 1 quand $N \rightarrow +\infty$ (voir [80, 62]). Cette étude suffit toutefois pour de nombreux résultats, par exemple pour la démonstration commune de la simplicité de l'algèbre stellaire réduite (l'adhérence en norme de l'image de la représentation régulière gauche de l'algèbre complexe du groupe) des quotients par leur centre de ces trois groupes lorsque $g \geq 3$ et $n \geq 3$, dans [22].

Une technique clef pour construire des groupes libres, utilisée dans ces trois situations (et d'autres), qui remonte à Klein et Schottky et admet de nombreuses déclinaisons, est la suivante (voir par exemple [5]).

LEMME 3.4 (Lemme du tennis de table). — *Soit X un espace topologique compact, muni d'une action par homéomorphismes d'un groupe Γ . Soit S une partie finie de Γ telle que $S \cap S^{-1} = \emptyset$. Supposons que tout $\gamma \in S \cup S^{-1}$ admette un point fixe x_γ^+ attracteur (ceci signifie qu'il existe un voisinage U de x_γ^+ tel que, pour tout voisinage V de x_γ^+ , nous avons $\gamma^n(U) \subset V$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand); notons $B_\gamma^+ = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n x = x_\gamma^+\}$ le bassin d'attraction (ouvert) de x_γ^+ . Supposons que les x_γ^+ pour $\gamma \in S \cup S^{-1}$ soient deux à deux distincts et que x_α^+ appartienne à B_β^+ pour tous α, β dans $S \cup S^{-1}$ tels que $\beta \neq \alpha^{-1}$. Alors il existe $p \in \mathbb{N} - \{0\}$ tel que le sous-groupe de Γ engendré par $S^p = \{s^p : s \in S\}$ soit libre sur S^p .*

3.1. Éléments loxodromiques

Un élément de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est *loxodromique* si les modules de ses valeurs propres complexes sont deux à deux distincts. Son action projective sur $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R})$ admet alors un point fixe attractif, correspondant à la droite propre de valeur propre de plus grand module, de bassin d'attraction le complémentaire de l'hyperplan projectif engendré par les autres droites propres. La dynamique projective des autres éléments de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est prescrite par sa forme normale de Jordan sur \mathbb{C} .

Une manière de voir ceci est d'utiliser la fonction de déplacement dis_α d'un élément α de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ dans l'espace symétrique \mathcal{E}_m muni d'une distance riemannienne invariante par $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$: son minimum est atteint si et seulement si α est semi-simple (diagonalisable sur \mathbb{C}) et lorsqu'il est atteint, α est loxodromique si et seulement si son ensemble minimal de translation est exactement un plat maximal de \mathcal{E}_m .

Une partie de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ est dite *unipotente* si ses éléments sont trigonalisables de valeurs propres égales à 1 dans une même base. Notons le théorème de Kolchin (version pour les groupes linéaires du théorème d'Engel pour les algèbres de Lie, voir par exemple [85]) qui dit qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont unipotents est unipotent. Une extension de ce résultat (voir par exemple [5, Coro. 2.4]) dit que tout sous-groupe de type fini de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$, dont les valeurs propres complexes de tout élément sont des racines de l'unité, est virtuellement unipotent.

La remarque clef pour montrer le théorème 3.1 pour $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ est la suivante.

LEMME 3.5. — *Un sous-groupe de type fini Γ de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$, contenant un élément loxodromique et dont tout sous-groupe d'indice fini agit de manière irréductible sur \mathbb{R}^m , contient un sous-groupe libre de rang 2.*

Il suffit d'appliquer le lemme du tennis de table à $X = \mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{R})$ et $S = \{\gamma, h\gamma h^{-1}\}$ où $\gamma \in \Gamma$ est loxodromique et $h \in \Gamma$ vérifie $hx_{\gamma^\epsilon}^+ \in B_{\gamma^{\epsilon'}}^+$ pour $\epsilon, \epsilon' = \pm 1$, ce qui est possible par l'hypothèse d'irréductibilité.

Bien sûr, ce lemme ne conclut pas : $\mathrm{SO}(m)$ par exemple ne contient pas d'élément loxodromique, ni, ce qui suffit pour la dynamique, d'élément ayant, ainsi que son inverse, une unique valeur propre de module maximal. Mais si Γ est un sous-groupe de type fini de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{R})$ non virtuellement résoluble, alors, quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini et en appliquant l'extension du théorème de Kolchin à son sous-groupe dérivé, il contient un élément ayant une valeur propre non racine de l'unité. Celle-ci est de valeur absolue strictement supérieure à 1 dans au moins un corps local k de caractéristique nulle, contenant les coefficients des éléments de Γ , et on remplace \mathbb{R}^m par k^m . Enfin, passer à une puissance extérieure permet d'isoler la plus grande valeur absolue d'une valeur propre, et un argument de suite de Jordan-Hölder permet de se débarrasser de la condition d'irréductibilité.

3.2. Éléments pseudo-Anosov

La théorie de Nielsen-Thurston décrivant les éléments de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ ayant déjà fait l'objet d'un rapport [79], nous ne la rappelons que brièvement (voir aussi [33]).

Supposons $g \geq 2$. Une *multi-courbe* de Σ_g est une union non vide de courbes fermées simples dans Σ_g , non homotopes à un point, et deux à deux disjointes et non homotopes. Un élément de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ est dit

- *périodique* s'il est d'ordre fini (ou, de manière équivalente, s'il admet un représentant dans $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)$ qui est d'ordre fini) ;
- *réductible* s'il admet un représentant dans $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)$ préservant une multi-courbe de Σ_g .
- *pseudo-Anosov* (parce qu'ils généralisent, aux surfaces Σ_g pour $g \geq 2$ qui n'en admettent pas, les difféomorphismes Anosov, voir par exemple [58]) s'il existe un de ses représentants h dans $\mathrm{Homeo}_+(\Sigma_g)$, deux feuilletages singuliers transversalement mesurés (\mathcal{F}_+, μ_+) et (\mathcal{F}_-, μ_-) , dits *stables et instables*, transverses, et $\lambda = \lambda(h) \in]0, 1]$ tels que $h(\mathcal{F}_\pm, \mu_\pm) = (\mathcal{F}_\pm, \lambda^{\pm 1} \mu_\pm)$.

Les travaux de Nielsen et Thurston montrent que tout élément apériodique et irréductible de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ est pseudo-Anosov, et décrivent les éléments quelconques par une forme normale de Thurston (voir par exemple [53]), qui joue le rôle de la forme normale de Jordan pour l'étude dynamique.

Une manière de voir ceci en utilisant les fonctions de déplacement est due à Bers [6] : si dis_α est la fonction de déplacement d'un élément α de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ dans l'espace de Teichmüller muni de la distance de Teichmüller, alors son minimum est atteint et nul si et seulement si α est périodique ; il est atteint non nul si et seulement si α est pseudo-Anosov ; et il n'est pas atteint si et seulement si α est réductible.

Le point clef de la preuve du théorème 3.1 pour $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$, qui sert de remplacement à l'argument de changement de corps de base pour $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, et dont la démonstration repose sur la dynamique de l'action de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ sur la compactification de Thurston, est le suivant.

PROPOSITION 3.6 (Ivanov [52]). — *Tout sous-groupe infini de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ ne préservant pas de classe d'isotopie de multi-courbe contient un élément pseudo-Anosov.*

Un analogue du théorème de Kolchin (qui découle de cette proposition par récurrence après adaptation au cas des surfaces à bord) est qu'un sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ dont chaque élément est une composition de puissances de twists de Dehn autour des composantes connexes d'une multi-courbe est constitué de compositions de puissances de twists de Dehn autour des composantes connexes d'une même multi-courbe.

Le caractère hyperbolique de $\pi_1(\Sigma_g)$ et \mathbb{F}_n , que ne possède pas \mathbb{Z}^m si $m \geq 2$, se reflète sur certaines propriétés de l'espace de Teichmüller et de l'outre-espace plus proches des espaces symétriques de type non compact de rang un que de rang supérieur (voir en particulier les travaux de Minsky sur l'espace de Teichmüller). En particulier, la dynamique des éléments génériques de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ et $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est plus simple.

Un homéomorphisme h d'un espace topologique séparé X admet une *dynamique nord-sud* sur X s'il fixe deux points x, y de X tels que, pour tout voisinage U de x et tout voisinage V de y , pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, $h^n(X - V) \subset U$ et $h^{-n}(X - U) \subset V$.

Thurston a montré que tout élément pseudo-Anosov a une dynamique nord-sud sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller, de points fixes les (classes d'homothétie des fonctions distances de translation des) arbres réels duaux (au sens, à l'origine, de [71]) de ses feuilletages stables et instables, et que le stabilisateur d'un de ces points fixes est virtuellement monogène. Ainsi, tout sous-groupe de $\text{Mod}(\Sigma_g)$, contenant un élément pseudo-Anosov α et non virtuellement monogène, contient un élément pseudo-Anosov β de paire des points fixes disjointe de celle de α . Il contient donc un groupe libre de rang 2, en appliquant le lemme du tennis de table avec X le bord de Thurston de l'espace de Teichmüller et $S = \{\alpha, \beta\}$. Par récurrence et adaptation au cas des surfaces à bord, le théorème 3.1 découle donc de la proposition précédente.

3.3. Éléments complètement irréductibles

Deux faits marquants rendent l'étude dynamique des éléments de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ (et par là l'étude des sous-groupes de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$) plus compliquée que dans le cas de $\text{Mod}(\Sigma_g)$:

- du point de vue dynamique topologique, alors que tout élément de $\text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$ est induit par l'action sur le groupe fondamental d'un homéomorphisme de Σ_g , un élément de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ n'est induit par l'action sur le groupe fondamental que d'une équivalence d'homotopie d'un graphe fini connexe, qui n'est que rarement homotope à un homéomorphisme ;
- du point de vue dynamique mesurable, alors que la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller se plonge de manière équivariante dans l'espace projectifié des courants géodésiques de $\pi_1(\Sigma_g)$, la compactification de l'outre-espace de Culler-Vogtmann n'admet pas, si $n \geq 3$, de plongement topologique équivariant dans l'espace projectifié des courants géodésiques de \mathbb{F}_n (voir [56]).

Le second point pourrait rendre indispensable des études parallèles et couplées de la dynamique sur $\overline{\text{CV}}_n$ et $\mathbb{P}\text{Curr}(\mathbb{F}_n)$, commencée par Kapovich et Lustig, qui ont montré dans [57] l'existence d'un accouplement action-courant pour $\Gamma = \mathbb{F}_n$ et $\mathcal{E} = \overline{\text{cv}}_n$.

Le premier point a rendu nécessaire l'introduction de bonnes réalisations topologiques des éléments de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, dont les premiers modèles, décrits ci-après, ont été définis par Bestvina et Handel dans [15] pour résoudre la conjecture de Scott (disant que le rang du sous-groupe (libre) des points fixes d'un automorphisme de \mathbb{F}_n est au plus n , résultat précisé dans [36]). Les modèles actuellement les plus élaborés (les *réalisations ferroviaires relatives améliorées complètement scindées* de [34, 46]) ont des définitions de plusieurs pages : s'ils sont utilisés pour des descriptions fines à sous-groupe d'indice fini près de sous-groupes de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, leur utilisation est techniquement lourde.

Un sous-groupe H de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est dit *complètement irréductible* si aucun sous-groupe d'indice fini de H ne fixe une classe de conjugaison de facteur libre (voir la définition au début de la partie 4.1) propre de \mathbb{F}_n . Un élément de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ (ou de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$) est *complètement irréductible* si le sous-groupe qu'il engendre (ou son image dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$) l'est. Par exemple, l'automorphisme de \mathbb{F}_2 défini par $\begin{cases} s_1 \mapsto s_1 s_2 s_1 \\ s_2 \mapsto s_2 s_1 \end{cases}$ est complètement irréductible, alors que les automorphismes de \mathbb{F}_3 et \mathbb{F}_4 définis par $\begin{cases} s_1 \mapsto s_1, & s_2 \mapsto s_1 s_2 \\ s_3 \mapsto s_1 s_3 s_2 \end{cases}$ et $\begin{cases} s_1 \mapsto s_1 s_2 s_1, & s_2 \mapsto s_2 s_1 \\ s_3 \mapsto s_3 s_1 s_4 s_3, & s_4 \mapsto s_4 s_3 \end{cases}$ ne le sont pas.

Une *réalisation ferroviaire* d'un élément complètement irréductible α de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est la donnée d'un graphe métrique marqué (X, f) et d'une équivalence d'homotopie $\phi : X \rightarrow X$, telle que

- il existe $\lambda_\alpha > 1$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ϕ^n soit localement homothétique de rapport λ_α^n sur chaque arête de X ,
- ϕ représente α , au sens que l'image dans $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ de $f_*^{-1} \circ \phi_* \circ f_* : \pi_1(R_n) \rightarrow \pi_1(R_n)$ est α .

Leur existence est montrée dans [15]. L'idée est de construire un graphe métrique marqué (X, f) , une partie finie V de X contenant les sommets de X , une relation d'équivalence pour chaque point x de X , ayant au moins deux classes, sur l'ensemble des germes d'arcs non paramétrés partant de x , et une équivalence d'homotopie $\phi : X \rightarrow X$ représentant α , telle que ϕ envoie V dans V , est localement injective en restriction à chaque composante connexe de $X - V$, et envoie deux germes inéquivalents sur deux germes inéquivalents. On munit alors $e \in E = \pi_0(X - V)$ de la longueur ℓ_e où $(\ell_e)_{e \in E}$ est le vecteur propre à coordonnées strictement positives (de norme \mathbb{L}^1 égale à 1), associé à la valeur propre λ_α (strictement positive) de plus grand module de la matrice irréductible $(n_{e,e'})_{e,e' \in E}$, où $n_{e,e'}$ est le nombre de points de e qui s'envoient sur le milieu de e' par ϕ (qui existe par le théorème de Perron-Frobenius). Voir aussi [8] pour une construction reposant sur une minimisation, analogue à celle de Bers évoquée pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$,

de la fonction de déplacement dis_α de α sur l'outre-espace muni de la distance non-symétrique (c'est-à-dire vérifiant les axiomes d'une distance sauf l'axiome de symétrie) d_{Lip} suivante : pour tous $x, y \in \text{CV}_n''$, si (X, f) et (X', f') sont des représentants de x et y , dont la somme des longueurs des arêtes est 1, alors d_{Lip} est la borne inférieure des constantes de Lipschitz des applications lipschitziennes $\ell : X \rightarrow X'$ telles que $\ell \circ f$ soit homotope à f' . L'application d_{Lip} est analogue à la distance non-symétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller (voir par exemple [73]), et a été étudiée en particulier par Whyte, Francaviglia, Martino, Algom-Kfir, Bestvina.

Le résultat clef pour comprendre la dynamique des éléments complètement irréductibles est le suivant, qui complète des résultats de Bestvina-Feighn-Handel, Lustig et Bestvina, et utilise les réalisations ferroviaires.

PROPOSITION 3.7 (Levitt-Lustig [64], Martin [67]). — *Si $n \geq 2$, un élément complètement irréductible de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ admet une dynamique nord-sud sur l'adhérence $\overline{\text{CV}_n}$ de l'outre-espace et, si $n \geq 3$, sur l'unique minimal de $\mathbb{P}\text{Curr}(\mathbb{F}_n)$.*

Notons que si $[T_+]$ et $[T_-]$ sont les points fixes attractifs et répulsifs de α dans $\overline{\text{CV}_n}$ (voir aussi [76, 77] pour leur construction), alors l'action de α sur T_\pm est $\lambda_{\alpha^\pm 1} T_\pm$, où λ_α a été défini ci-dessus, et de même en échangeant λ_α et $\lambda_{\alpha^{-1}}$ dans $\mathbb{P}\text{Curr}(\mathbb{F}_n)$. Mais en général, nous n'avons pas $\lambda_{\alpha^{-1}} = (\lambda_\alpha)^{-1}$, contrairement au cas des éléments pseudo-Anosov de $\text{Mod}(\Sigma_g)$. De plus, le stabilisateur de $[T_+]$ dans $\overline{\text{CV}_n}$ est virtuellement monogène, par [11, Theo. 2.14]. Comme pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$, le lemme du tennis de table montre alors le résultat principal de [11] suivant.

PROPOSITION 3.8. — *Un sous-groupe de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ contenant un élément complètement irréductible est virtuellement monogène ou contient un sous-groupe libre de rang 2.*

L'analogue du résultat 3.6 d'Ivanov reste vrai, bien que de démonstration beaucoup plus technique, comme mentionné ci-dessus.

PROPOSITION 3.9 (Handel-Mosher [46]). — *Un sous-groupe complètement irréductible de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ contient un élément complètement irréductible.*

Mais contrairement au cas de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ (où un sous-groupe réductible admet un sous-groupe d'indice fini préservant chaque composante connexe du complémentaire d'une multi-courbe, ce qui permet de faire des récurrences sur la valeur absolue de la caractéristique d'Euler, au seul prix d'une extension aux surfaces à bord des résultats), un sous-groupe non complètement irréductible de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, s'il admet un sous-groupe d'indice fini préservant la classe de conjugaison d'un facteur libre propre A , ne préserve pas forcément la classe de conjugaison d'un facteur libre B tel que le morphisme canonique de $A * B$ dans \mathbb{F}_n soit un isomorphisme. Ceci justifie l'introduction (voir [15, 12, 14]) de bonnes réalisations géométriques des éléments quelconques de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, analogues à la forme normale de Jordan d'un élément de $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ et à la forme normale

de Thurston d'un élément de $\text{Mod}(\Sigma_g)$. Nous ne le ferons ci-dessous que dans le cas le plus éloigné des réalisations ferroviaires d'éléments complètement irréductibles.

Pour toute classe de conjugaison c d'un groupe Γ muni d'une partie génératrice finie fixée S , notons $|c|$ la longueur minimale d'une écriture comme mot en $S \cup S^{-1}$ d'un élément de c . Une partie H de $\text{Out}(\Gamma)$ est dite à *croissance des itérations polynomiale* si, pour tout $\alpha \in H$ et pour toute classe de conjugaison c de Γ , il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\alpha^n(c)|}{n^{k+1}} = 0$. Par exemple, un sous-groupe de type fini de $\text{Out}(\mathbb{Z}^m) = \text{GL}_m(\mathbb{Z})$ est à croissance des itérations polynomiale si et seulement s'il est virtuellement unipotent, et un sous-groupe de type fini de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ est à croissance des itérations polynomiale si et seulement si, à sous-groupe d'indice fini près, il est formé de compositions de puissances de twists de Dehn autour des composantes connexes d'une même multicourbe. Mais un sous-groupe de type fini de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ peut à la fois être à croissance des itérations polynomiale et contenir un groupe libre de rang 2. Une *réalisation ferroviaire triangulaire* d'un élément à croissance des itérations polynomiale α de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est la donnée d'un graphe métrique marqué (X, f) , d'une partie finie V de X contenant les sommets de X , d'une numérotation e_1, \dots, e_p des adhérences des composantes connexes de $X - V$ et d'une équivalence d'homotopie $\phi : X \rightarrow X$ représentant f , envoyant V dans V et localement injective sur chaque composante connexe de $X - V$, telle que le chemin $f(e_i)$ soit une concaténation de chemins $u_i e_i v_i$ ou $u_i \overline{e_i} v_i$, où u_i, v_i sont des lacets dans $\bigcup_{j=1}^{i-1} e_j$.

Bestvina-Feighn-Handel montrent d'une part que l'alternative de Tits est vraie pour tous les sous-groupes de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ si et seulement si elle est vraie pour les sous-groupes à croissance des itérations polynomiale, et d'autre part un analogue du théorème de Kolchin pour $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ ci-dessus mentionné, disant qu'à sous-groupe d'indice fini près, tout élément d'un sous-groupe de type fini de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ à croissance des itérations polynomiale admet une réalisation ferroviaire triangulaire de même graphe métrique marqué sous-jacent. Avec une borne sur la complexité de celui-ci, l'alternative de Tits pour les sous-groupes à croissance des itérations polynomiale s'en déduit assez facilement.

Nous renvoyons à l'appendice de [11] pour une présentation plus complète de la structure de la démonstration dans [12, 14] du théorème 3.1 pour $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$.

4. GÉOMÉTRIE ASYMPTOTIQUE

Par ce titre vague, nous entendons trois types de résultats sur nos groupes, concernant la structure à l'infini des quotients par ces groupes des espaces construits dans la partie 2, la structure de leurs cônes asymptotiques (lorsque ces groupes ou ces espaces sont regardés d'infiniment loin), et certaines propriétés de rigidité à grande échelle. Supposons $m, g, n \geq 2$.

4.1. Bordification

Nous appellerons *facteur libre* (respectivement *facteur direct*) d'un groupe G tout sous-groupe propre A de G tel qu'il existe un sous-groupe propre B de G tel que le morphisme canonique du produit libre $A * B$ (respectivement du produit direct $A \times B$) dans G soit un isomorphisme. Nous fixons un revêtement universel $\tilde{\pi} : \tilde{\Sigma}_g \rightarrow \Sigma_g$ de groupe de revêtement $\pi_1(\Sigma_g)$.

À l'infini de \mathcal{E}_m , $\text{Teich}(\Sigma_g)$, CV_n , vivent des sous-complexes remarquables invariants par $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$, $\text{Mod}(\Sigma_g)$, $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ respectivement.

- L'immeuble de Tits sphérique de SL_m sur \mathbb{Q} , que nous noterons $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_m)$, peut être défini comme la réalisation géométrique sphérique (où l'on remplace chaque simplexe standard maximal par un simplexe de Coxeter dans la sphère $_{m-1}$ de type A_{m-1}) de l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion des facteurs directs de \mathbb{Z}^m , muni de l'action à gauche de $\text{GL}_m(\mathbb{Z})$ induite par l'action linéaire sur les parties de \mathbb{Z}^m . L'application, qui à un facteur direct de \mathbb{Z}^m associe le stabilisateur dans $\text{SL}_m(\mathbb{Q})$ du \mathbb{Q} -sous-espace vectoriel de \mathbb{Q}^m qu'il engendre, induit un homéomorphisme simplicial de $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_m)$ dans la définition usuelle de celui-ci (la réalisation géométrique sphérique du complexe simplicial d'ensemble des sommets l'ensemble I des sous-groupes paraboliques propres maximaux définis sur \mathbb{Q} de SL_m , et de simplexes les parties J de I telles que $\cap J$ soit parabolique). En particulier, $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_m)$ est un sous-complexe (non localement fini) de l'immeuble de Tits sphérique de SL_m sur \mathbb{R} (défini de même en remplaçant \mathbb{Q} par \mathbb{R}). Celui-ci admet une (unique) bijection continue $\text{SL}_m(\mathbb{R})$ -équivariante dans le bord géométrique (l'espace quotient de l'espace des rayons géodésiques par la relation « être à distance de Hausdorff finie ») de la variété riemannienne complète simplement connexe à courbure sectionnelle négative ou nulle $\mathcal{E}_m = \text{SO}(n) \backslash \text{SL}_m(\mathbb{R})$.

- Le complexe des courbes $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ de Σ_g , défini par Harvey [49], est la réalisation géométrique standard du complexe simplicial (non localement fini) dont les simplexes sont les ensembles des classes d'isotopie des composantes connexes d'une multi-courbe, muni de l'action à gauche de $\text{Mod}(\Sigma_g)$ induite par l'action de $\text{Homeo}_+(\Sigma_g)$ sur les multicourbes. En particulier, ses sommets sont les classes d'isotopie des courbes fermées simples non homotopes à zéro de Σ_g . Il s'identifie à une partie du bord de Thurston de $\text{Teich}(\Sigma_g)$, par l'injection continue qui, au point de coordonnées barycentriques (t_1, \dots, t_p) du simplexe défini par une multi-courbe c de composantes connexes $\gamma_1, \dots, \gamma_p$, associe (la classe d'homothétie de la fonction distance de translation de) l'arbre métrique de sommets les composantes connexes de $\tilde{\Sigma}_g - \tilde{\pi}^{-1}(c)$, d'arêtes de longueur t_i les composantes connexes de $\tilde{\Sigma}_g - \tilde{\pi}^{-1}(\gamma_i)$ pour $1 \leq i \leq p$, un sommet v étant extrémité d'une arête e si v est contenu dans l'adhérence de e , muni de l'action induite (isométrique, minimale et petite) de $\pi_1(\Sigma_g)$.

- Le complexe des facteurs libres $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est la réalisation géométrique standard de l'ensemble des classes de conjugaison des facteurs libres de \mathbb{F}_n partiellement ordonné par la relation $x \prec y$ s'il existe des représentants A et B de x et y tels que A soit un sous-groupe propre (ou, de manière équivalente, un facteur libre) de

B , muni de l'action à gauche de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ induite par son action sur les classes de conjugaison des sous-groupes de \mathbb{F}_n . Le morphisme d'abélianisation de \mathbb{F}_n dans \mathbb{Z}^n induit un morphisme simplicial surjectif de $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ sur l'immeuble de Tits sphérique de SL_n sur \mathbb{Q} , équivariant pour la projection canonique de $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ sur $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Il ne faut pas confondre ce complexe avec le *complexe des facteurs libres* $\mathcal{F}_{\text{Aut}}(\mathbb{F}_n)$ de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ défini par Hatcher-Vogtmann (1998), qui est la réalisation géométrique de l'ensemble partiellement ordonné par l'inclusion des facteurs libres de \mathbb{F}_n , muni de l'action à gauche induite par l'action de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ sur les parties de \mathbb{F}_n . L'application qui à un facteur libre associe sa classe de conjugaison induit un morphisme simplicial surjectif, équivariant pour la projection canonique de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ sur $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, du second complexe sur le premier.

Le résultat suivant est dû respectivement à Solomon-Tits (1969), à Harer (1986) (voir aussi Ivanov (1987)), et à Hatcher-Vogtmann (1998).

THÉORÈME 4.1. — *L'immeuble de Tits sphérique de SL_m sur \mathbb{Q} , le complexe des courbes de Σ_g et le complexe des facteurs libres de $\text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ ont le type d'homotopie de bouquets de sphères de dimension respectivement $m - 2$, $2g - 2$, $n - 2$.*

La géométrie de $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_m)$ est bien comprise. Cet espace métrique de diamètre π est un immeuble de Tits de type le système de Coxeter sphérique de type A_{m-1} et en particulier est $\text{CAT}(-1)$. Pour $k \in \{-1\} \cup \mathbb{N}$, un espace topologique localement compact X est *k-connexe à l'infini* si pour tout compact K de X , il existe un compact K' de X tel que toute application continue de la sphère de dimension k dans le complémentaire de K' se prolonge continuellement en une application de la boule de dimension $k + 1$ dans le complémentaire de K . Un groupe discret est *k-connexe à l'infini* s'il agit simplicialement, librement, avec quotient compact, sur un complexe simplicial *k-connexe à l'infini*. Un groupe discret est *virtuellement un groupe à dualité de dimension k* (une terminologie introduite par Bieri-Eckmann (1973)) s'il contient un sous-groupe d'indice fini Γ agissant cellulièrement, librement, avec quotient compact, sur un CW-complexe contractile et si le groupe abélien $H^i(\Gamma, \mathbb{Z}[\Gamma])$ est nul pour $i \neq k$ et libre si $i = k$. Ceci implique que k est la dimension cohomologique virtuelle du groupe Γ et que, pour tout Γ -module A , les groupes abéliens $H^i(\Gamma, A)$ et $H_{k-i}(\Gamma, H^k(\Gamma, \mathbb{Z}[\Gamma]) \otimes A)$ sont isomorphes. Siegel (1953) (généralisé par Borel-Serre [18]) montre qu'il existe une topologie localement compacte contractile $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ -invariante sur la réunion de \mathcal{E}_m et d'un espace topologique ayant le type d'homotopie équivariant de $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\text{SL}_m)$, dont l'espace quotient par $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ est compact. Ce type de construction est depuis connu sous le nom de *bordification*. Il en découle que $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ est $(m - 3)$ -connexe à l'infini, et Borel-Serre (loc. cit.) montrent de plus qu'il est virtuellement un groupe à dualité de dimension $m(m - 1)/2$.

La géométrie de $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ commence à être bien étudiée. Harvey [49, 50] a construit une bordification de $\text{Teich}(\Sigma_g)$ pour le groupe $\text{Mod}(\Sigma_g)$, en rajoutant un espace ayant le

type d'homotopie de $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ (cette bordification est homéomorphe, de manière $\text{Mod}(\Sigma_g)$ -équivariante, au sous-espace de \mathcal{T}'' des modules de surfaces hyperboliques marquées de rayon d'injectivité au moins ϵ , pour tout ϵ assez petit). Le théorème 4.1 montre donc que $\text{Mod}(\Sigma_g)$ est $(2g - 3)$ -connexe à l'infini, et Harer [47] montre de plus qu'il est virtuellement un groupe à dualité de dimension $4g - 5$.

Le fait le plus marquant est que $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ est hyperbolique au sens de Gromov. Ceci est un résultat remarquable (et aux nombreux usages, que ce soit pour la résolution de la conjecture de la lamination terminale que pour les propriétés de la cohomologie bornée de $\text{Mod}(\Sigma_g)$) de Masur-Minsky [68] (voir [20] pour une démonstration simplifiée et plus effective). Klarreich (1999) (voir aussi [44]) a montré que le bord de Gromov de $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ est homéomorphe, de manière équivariante, à un espace quotient d'un sous-espace du bord de Thurston de l'espace de Teichmüller, plus précisément l'espace des (classes d'homothétie des fonctions distances de translation des) actions libres à orbites denses de $\pi_1(\Sigma_g)$, modulo bijections équivariantes préservant l'alignement. Autrement dit, le bord de Gromov de $\mathcal{C}(\Sigma_g)$ est homéomorphe, de manière équivariante, à l'espace quotient, modulo oubli de la mesure transverse, de l'espace projectifié des feuilletages singuliers transversalement mesurés sur Σ_g qui sont minimaux.

Par contre, la géométrie de $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ est actuellement très mystérieuse. Bestvina-Feighn [9] ont construit une bordification de CV_n pour le groupe $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$, par des considérations de rayons d'injectivité infiniment petits de différents ordres pour les graphes métriques marqués, ou, de manière équivalente, des considérations d'actions de groupes sur des \mathbb{R}^n -arbres (pour l'ordre lexicographique sur \mathbb{R}^n , voir par exemple [26]). Ils en déduisent que $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est $(2n - 5)$ -connexe à l'infini, et est virtuellement un groupe à dualité de dimension $2n - 3$. Mais la relation entre le complexe $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ et le bord de la bordification de Bestvina-Feighn de l'outre-espace n'est pas claire : il serait intéressant de savoir s'ils ont même type d'homotopie. L'hyperbolicité au sens de Gromov de $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ est conjecturée par les experts, mais pour l'instant seuls des *ersatz* ont été construits, par Bestvina-Feighn [10]. Une possibilité serait d'essayer de construire, par des techniques d'actions de groupes sur des arbres réels (ou \mathbb{R}^n -arbres) ou de réalisations ferroviaires et leurs laminations, le candidat pour être son bord de Gromov à l'infini, puis d'utiliser des méthodes à la Tukia, Pansu, Bowditch pour montrer qu'il est le bord de $\mathcal{F}_{\text{Out}}(\mathbb{F}_n)$ (ou d'un complexe analogue, voir par exemple [57] pour une liste de candidats).

4.2. Cônes asymptotiques

Soit (X, d) un espace métrique. Choisissons un ultrafiltre sur \mathbb{N} , plus fin que le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies (voir [19, I]), $(*_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de points bases de X , et $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite dans $]0, +\infty[$ convergeant vers 0. Pour toute suite réelle $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, nous noterons $\lim_{\omega} t_i$ la limite dans $[-\infty, +\infty]$ de l'ultrafiltre image de ω par la suite (voir [19, I]). Considérons l'ensemble

$$X_{\infty} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : \lim_{\omega} \epsilon_i d(x_i, *_i) < +\infty\},$$

pointé en $(*_i)_{i \in \mathbb{N}}$, et muni de la pseudo-distance $d_\infty(x, y) = \lim_\omega \epsilon_i d(x_i, y_i)$. Alors l'espace métrique pointé $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ quotient séparé canonique de $(X_\infty, d_\infty, *_\infty)$ est appelé un *cône asymptotique* de X .

Tout groupe de type fini est muni d'une distance des mots, qui ne dépend pas, ainsi que son cône asymptotique à autres choix constants, du choix d'une partie génératrice finie fixée, à homéomorphisme bilipschitz près. Par exemple, tout cône asymptotique de \mathcal{E}_2 et de \mathbb{F}_n (et donc de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Mod}(\Sigma_1)$, $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_2)$ et plus généralement de tout groupe hyperbolique au sens de Gromov), est un arbre réel, dont tout point est un point de coupure global.

Si X est un complexe polyédral sphérique (ayant un nombre fini de types d'isométrie de cellules, voir [21] pour toute information), nous appellerons *cône radial* sur X l'espace métrique géodésique obtenu en remplaçant chaque cellule sphérique contenue dans la sphère $_p$ par le cône euclidien des rayons géodésiques de \mathbb{R}^{p+1} qui passent par ce simplexe. La bordification de l'espace symétrique \mathcal{E}_m par l'immeuble de Tits sphérique de SL_m sur \mathbb{Q} mentionnée ci-dessus a permis à Hattori [51] de montrer que, pour tout sous-groupe d'indice fini Γ de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$, tout cône asymptotique de \mathcal{E}_m/Γ est isométrique au cône radial sur $\Gamma \backslash \mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(\mathrm{SL}_m)$. Mais une description aussi précise des cônes asymptotiques de $\mathrm{Teich}(\Sigma_g)/\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ (pour la distance de Teichmüller quotient) ne semble pas être connue.

Les cônes asymptotiques de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ sont assez bien connus. En effet, par un théorème de Kleiner-Leeb [60] et une description plus précise de Leeb et Parreau [74], tout cône asymptotique de \mathcal{E}_m est isométrique à l'immeuble de Tits affine de SL_m sur un corps valué complet de caractéristique nulle (muni d'une valuation réelle surjective) (dépendant de l'ultrafiltre ω et de la suite de scalaires $(\epsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$). Par le théorème de Lubotzky-Mozes-Raghunathan [65], tout cône asymptotique de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ s'envoie donc par un homéomorphisme bilipschitzien dans un immeuble de Tits affine. En particulier, la dimension topologique maximale d'un sous-espace localement compact d'un cône asymptotique de $\mathrm{SL}_m(\mathbb{Z})$ est $m - 1$. Mais on peut montrer qu'aucun de ses points n'est un point de coupure local si $m \geq 3$.

Les cônes asymptotiques de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ commencent à être compris, en particulier suite aux travaux de Behrstock. Confirmant que les groupes modulaires cumulent des propriétés de rang un et de rang supérieur, celui-ci a montré dans [2] que tout point de tout cône asymptotique de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ est un point de coupure global. Behrstock-Minsky [4] ont montré (en utilisant les techniques de Minsky de projections fortement contractantes sur les géodésiques de Teichmüller dont les images dans le quotient par $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ restent dans un compact, qui avaient déjà servi dans [68]) que la dimension topologique maximale d'un sous-espace localement compact d'un cône asymptotique de $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ est $3g - 3$ (le même nombre qui apparaît dans le théorème 3.2).

Mais à la connaissance de l'auteur, les problèmes analogues pour $\mathrm{Out}(\mathbb{F}_n)$ sont encore ouverts, en particulier parce que la structure métrique à grande échelle de CV_n est

obscur. Voir par exemple le travail d’Algom-Kfir (2009), utilisant la distance non symétrique sur CV_n évoquée auparavant, pour des résultats d’existence de points de coupure global dans tout cône asymptotique de CV_n , suivant une méthode de démonstration semblable à celle de [2].

La présence de points de coupures globaux dans les cônes asymptotiques ne suffit quand même pas pour montrer l’hyperbolicité relative (au sens fort, une notion due à Gromov, et développée par Farb et Bowditch) de nos groupes. En fait, Karlsson-Noskov (2004), Anderson-Aramayona-Shackleton (2007) et Behrstock-Druţu-Mosher (2009) ont montré que si $m \geq 3$, $g \geq 2$ et $n \geq 3$, alors $SL_m(\mathbb{Z})$, $Mod(\Sigma_g)$ et $Out(\mathbb{F}_n)$ ne sont relativement hyperboliques par rapport à aucune famille finie de sous-groupes de type fini d’indice infini.

4.3. Rigidité

Le résultat suivant est, respectivement, une conséquence du théorème de rigidité de Mostow-Margulis (voir par exemple [90]), dû à Ivanov (voir par exemple [53, 8.5.B]) et dû à Farb-Handel [32] (améliorant fortement le résultat de Kramtsov (1990) que $Out(Out(\mathbb{F}_n)) = \{1\}$ (montré par Bridson-Vogtmann (2000) en utilisant l’outre-espace)). Dans ces trois cas, la démonstration utilise, du moins en esprit, les propriétés des sous-groupes abéliens (maximaux) et de la combinatoire de leurs intersections, que ce soit par la combinatoire des plats maximaux décrite par l’immeuble de Tits à l’infini de $SL_m(\mathbb{R})$, par les nombres d’intersection de courbes fermés simples dans Σ_g (autour desquelles ont lieu les twists de Dehn), ainsi que par l’étude de [34] des sous-groupes abéliens de $Out(\mathbb{F}_n)$ et le théorème à la Kolchin de [14] mentionné ci-dessus.

THÉORÈME 4.2. — *Soit Γ un sous-groupe d’indice fini de $SL_m(\mathbb{Z})$ pour $m \geq 3$, $Mod(\Sigma_g)$ pour $g \geq 2$, ou $Out(\mathbb{F}_n)$ pour $n \geq 4$. Alors $Out(\Gamma)$ est fini.*

Des méthodes semblables fournissent le résultat suivant. Le *commensurateur abstrait* $Comm(\Gamma)$ d’un groupe Γ est le groupe des classes d’équivalence d’isomorphismes entre sous-groupes d’indice fini de Γ , où deux tels isomorphismes sont identifiés s’ils coïncident sur un sous-groupe d’indice fini de Γ , muni de la loi $[f' : G' \rightarrow H'] \circ [f : G \rightarrow H] = [f' \circ f : f^{-1}(H \cap G') \rightarrow f'(G' \cap H)]$. Nous avons un morphisme de Γ dans $Comm(\Gamma)$, qui à $\gamma \in \Gamma$ associe la classe de la conjugaison $i_\gamma : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Par exemple, l’application qui, à $\gamma \in SL_m(\mathbb{Q})$ associe la classe de la conjugaison par γ définie sur le sous-groupe d’indice fini $\gamma^{-1}SL_m(\mathbb{Z})\gamma \cap SL_m(\mathbb{Z})$, est un isomorphisme de $SL_m(\mathbb{Q})$ sur $Comm(SL_m(\mathbb{Z}))$ pour $m \geq 3$, par le théorème de densité de Borel (voir par exemple [90]). Ce contraste important avec le résultat suivant pourrait se comprendre par les faits déjà mentionnés que le groupe des isométries de l’espace de Teichmüller est réduit à $Mod_\pm(\Sigma_g)$ si $g \geq 2$, et le groupe des automorphismes combinatoires de l’outre-espace est réduit à $Out(\mathbb{F}_n)$ si $n \geq 3$.

THÉORÈME 4.3 (Ivanov ; Farb-Handel). — *Le morphisme canonique $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g) \rightarrow \text{Comm}(\text{Mod}(\Sigma_g))$ est un isomorphisme pour $g \geq 3$; le morphisme canonique $\text{Out}(\mathbb{F}_n) \rightarrow \text{Comm}(\text{Out}(\mathbb{F}_n))$ est un isomorphisme pour $n \geq 4$.*

Rappelons que deux espaces métriques X et Y sont *quasi-isométriques* s'il existe $\lambda \geq 1$, $c \geq 0$ et une application $f : X \rightarrow Y$ telle que $-c + \frac{1}{\lambda} d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) + c$ pour tous $x, y \in X$, et que $d(y, f(X)) \leq c$ pour tout $y \in Y$. Nous renvoyons à [30] pour des motivations et une présentation détaillée du problème de savoir quels sont les groupes de type fini quasi-isométriques à un (bel) espace métrique donné, et en particulier de savoir si un groupe de type fini quasi-isométrique à un (beau) groupe de type fini lui est isomorphe, à sous-groupes d'indice fini et quotients de noyau fini près. Le résultat suivant est dû à Eskin [31] (voir aussi [29]) pour $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$ et à Hamenstädt [45] (voir aussi [3]) pour $\text{Mod}(\Sigma_g)$. En notant $Z(G)$ le centre d'un groupe G , nous avons $Z(\text{SL}_m(\mathbb{Z})) = \{\pm \text{id}\}$ si m est pair, $Z(\text{SL}_m(\mathbb{Z})) = \{1\}$ sinon; $Z(\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $g = 1, 2$ (engendré par la classe de l'involution hyperelliptique si $g = 2$) et $Z(\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)) = \{1\}$ sinon; $Z(\text{Out}(\mathbb{F}_n)) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $n = 1, 2$ et $Z(\text{Out}(\mathbb{F}_n)) = \{1\}$ sinon.

THÉORÈME 4.4. — *Si $G = \text{SL}_m(\mathbb{Z})$ et $m \geq 3$ ou si $G = \text{Mod}_\pm(\Sigma_g)$ et $g \geq 2$, alors tout groupe de type fini quasi-isométrique à G admet un sous-groupe d'indice fini qui s'envoie dans $G/Z(G)$ avec noyau fini et image d'indice fini.*

Mais à la connaissance du rédacteur, le problème analogue pour $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est encore ouvert.

Un problème de rigidité voisin est le suivant. Gromov [40, 0.2.C] a montré que deux groupes de type fini sont quasi-isométriques si et seulement s'ils admettent deux actions continues, propres et à quotient compact, qui commutent, sur un même espace topologique localement compact. Comme défini par Gromov, deux groupes dénombrables G et H sont dit *mesurablement équivalents* s'ils admettent deux actions mesurables préservant la mesure, essentiellement libres, admettant un domaine fondamental mesurable de mesure finie, et qui commutent, sur un même *espace de Lebesgue* (espace borélien standard muni d'une mesure positive σ -finie). Par exemple, deux *réseaux* (sous-groupes discrets de covolume fini) du groupe unimodulaire $\text{PSL}_m(\mathbb{R})$ sont mesurablement équivalents (en considérant les actions par translations à droite et à gauche), mais ne sont pas forcément commensurables. Le premier résultat suivant est dû à Furman [35] (et plus généralement pour les réseaux de groupes de Lie réels connexes quasi-simples de centre fini, sans facteur compact, de rang réel au moins 2) et le second à Kida [59].

THÉORÈME 4.5. — *Tout groupe dénombrable mesurablement équivalent à $\text{SL}_m(\mathbb{Z})$, où $m \geq 3$, admet un morphisme dans $\text{PSL}_m(\mathbb{R})$ de noyau fini et d'image un réseau. Tout groupe dénombrable mesurablement équivalent à $\text{Mod}(\Sigma_g)$, où $g \geq 2$, admet un morphisme dans $\text{Mod}_\pm(\Sigma_g)/Z(\text{Mod}_\pm(\Sigma_g))$ de noyau fini et d'image d'indice fini.*

Mais à la connaissance du rédacteur et de Gaboriau, le problème analogue pour $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ est aussi encore ouvert.

RÉFÉRENCES

- [1] A. ASH – *Deformation retracts with lowest possible dimension of arithmetic quotients of self-adjoint homogeneous cones*. Math. Ann. **225** (1977) 69–76.
- [2] J. BEHRSTOCK – *Asymptotic geometry of the mapping class group and Teichmüller space*. Geom. & Topo. **10** (2006) 1523–1578.
- [3] J. BEHRSTOCK, B. KLEINER, Y. MINSKY, L. MOSHER – *Geometry and rigidity of mapping class groups*. Prépublication 2009, [arXiv0801.2006](#).
- [4] J. BEHRSTOCK, Y. MINSKY – *Dimension and rank for mapping class groups*. Ann. of Math. **167** (2008) 1055–1077.
- [5] Y. BENOIST – *Sous-groupes discrets des groupes de Lie*. Polycopié, Euro. Summer School (1997).
- [6] L. BERS – *An extremal problem for quasiconformal mappings and a theorem by Thurston*. Acta Math. **141** (1978) 73–98.
- [7] M. BESTVINA – *The topology of $\text{Out}(F_n)$* . Proceedings ICM, Vol. II (Beijing 2002), 373–384, Higher Ed. Press, 2002.
- [8] M. BESTVINA – *A Bers-like proof of the existence of train tracks for free group automorphisms*. Prépublication Univ. Utah 2010, voir aussi [arXiv1001.0325](#).
- [9] M. BESTVINA, M. FEIGHN – *The topology at infinity of $\text{Out}(F_n)$* . Invent. Math. **140** (2000) 651–692.
- [10] M. BESTVINA, M. FEIGHN – *A hyperbolic $\text{Out}(F_n)$ -complex*. Groups Geom. Dyna. **4** (2010) 31–58.
- [11] M. BESTVINA, M. FEIGHN, M. HANDEL – *Laminations, trees and irreducible automorphisms of free groups*. Geom. Funct. Anal. **7** (1997) 215–244; erratum **7** (1997) 1143–1143.
- [12] M. BESTVINA, M. FEIGHN, M. HANDEL – *The Tits alternative for $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ I : Dynamics of exponentially growing automorphisms*. Ann. of Math. **151** (2000) 517–623.
- [13] M. BESTVINA, M. FEIGHN, M. HANDEL – *Solvable subgroups of $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ are virtually abelian*. Geom. Dedicata **104** (2004) 71–96.
- [14] M. BESTVINA, M. FEIGHN, M. HANDEL – *The Tits alternative for $\text{Out}(\mathbb{F}_n)$ II : A Kolchin type theorem*. Ann. of Math. **161** (2005) 1–59.
- [15] M. BESTVINA, M. HANDEL – *Train tracks and automorphisms of free groups*. Ann. of Math. **135** (1992) 1–51.
- [16] F. BONAHO – *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*, Invent. Math. **92** (1988) 139–162.
- [17] F. BONAHO – *Geodesic currents on negatively curved groups*, in “Arboreal group theory”, R. Alperin ed., pp. 143–168, Pub. M.S.R.I. **19**, Springer Verlag 1991.

- [18] A. BOREL, J.-P. SERRE – *Corners and arithmetic groups*. Avec un appendice : Arrondissement des variétés à coins, par A. Douady et L. Hérault. Comment. Math. Helv. **48** (1973) 436–491.
- [19] N. BOURBAKI – *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, 1971.
- [20] B. H. BOWDITCH – *Intersection numbers and the hyperbolicity of the curve complex*. J. reine angew. Math. **598** (2006) 105–129.
- [21] M. BRIDSON, A. HAEFLIGER, *Metric spaces with non-positive curvature*. Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag, 1998.
- [22] M. BRIDSON, P. DE LA HARPE – *Mapping class groups and outer automorphism groups of free groups are C^* -simple*. J. Funct. Anal. **212** (2004) 195–205.
- [23] M. BRIDSON, K. VOGTMANN – *Automorphism groups of free groups, surface groups and free abelian groups*. In "Problems on Mapping Class Groups", B. Farb ed., Proc. Symp. Pure Math. **74**, Amer. Math. Soc. (2006) 301–316.
- [24] K. S. BROWN – *Cohomology of groups*. Grad. Texts Math. **87**, Springer Verlag, Corr. ed. 1982.
- [25] R. CHARNEY, K. VOGTMANN – *Finiteness properties of automorphism groups of right-angled Artin groups*. Bull. Lond. Math. Soc. **41** (2009) 94–102.
- [26] I. CHISWELL – *Introduction to Λ -trees*, World Scientific, 2001.
- [27] M. CULLER, K. VOGTMANN – *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*. Invent. Math. **84** (1986) 91–119.
- [28] M. DEHN – *Papers on group theory and topology*. Translated and introduced by John Stillwell, Springer Verlag, 1987.
- [29] C. DRUȚU – *Quasi-isometric classification of non-uniform lattices in semi-simple groups of higher rank*. Geom. Funct. Anal. **10** (2000) 327–388.
- [30] C. DRUȚU – *Quasi-isometry rigidity of groups*. Dans « Géométrie à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités », L. Bessières, A. Parreau, B. Remy eds (Actes de l'école d'été de l'Institut Fourier, Grenoble, 2004), Sémin. Congrès **18**, 323–374, Soc. Math. France, 2009.
- [31] A. ESKIN – *Quasi-isometric rigidity of nonuniform lattices in higher rank symmetric spaces*. J. Amer. Math. Soc. **11** (1998) 321–361.
- [32] B. FARB, M. HANDEL – *Commensurations of $\text{Out}(F_n)$* . Publ. Math. I. H. É. S. **105** (2007) 1–48.
- [33] A. FATHI, F. LAUDENBACH, V. POENARU – *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.
- [34] M. FEIGHN, M. HANDEL – *Abelian subgroups of $\text{Out}(F_n)$* . Geom. & Topol. **13** (2009) 1657–1727.
- [35] A. FURMAN – *Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices*. Ann. of Math. **150** (1999) 1059–1081.
- [36] D. GABORIAU, A. JÄGER, G. LEVITT, M. LUSTIG – *An index for counting fixed points of automorphisms of free groups*. Duke Math. J. **93** (1998) 425–452.
- [37] F.P. GARDINER – *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Wiley, 1987.

- [38] É. GHYS – *Les groupes hyperboliques*. Sémin. Bourbaki (1989/90), Exp. n° 722, Astérisque **189-190**, Soc. Math. France (1990) 203–238.
- [39] F. GRUNEWALD, A. LUBOTZKY – *Linear representations of the automorphism group of a free group*. Geom. Funct. Anal. **18** (2009) 1564–1608.
- [40] M. GROMOV – *Asymptotic invariants of infinite groups*. “Geometric group theory” Vol. 2 (Sussex, 1991) A. Niblo, M. Roller eds, LMS LNS **182**, Cambridge Univ. Press, 1993.
- [41] V. GUIARDEL, G. LEVITT – *The outer space of a free product*. Proc. London Math. Soc. **94** (2007) 695–714.
- [42] V. GUIARDEL, G. LEVITT – *Deformation spaces of trees*. Groups Geom. Dyna. **1** (2007) 135–181.
- [43] T. HAETTEL – *Compactification de Thurston d’espaces de réseaux marqués*, prépublication Univ. Paris-Sud 11 (Orsay), mars 2011.
- [44] U. HAMENSTÄDT – *Train tracks and the Gromov boundary of the complex of curves*. Dans “Spaces of Kleinian groups”, Y. Minsky, M. Sakuma, C. Series, eds., London Math. Soc. Lec. Notes **329**, Cambridge Univ. Press 2006, 187–207.
- [45] U. HAMENSTÄDT – *Geometry of the mapping class groups III : Quasi-isometric rigidity*. Prépublication 2007, [arXivmath.GT/0512429](#).
- [46] M. HANDEL, L. MOSHER – *Subgroup classification in $\text{Out}(F_n)$* . Prépublication 2009, [arXiv0908.1255](#).
- [47] J. HARER – *The virtual cohomological dimension of the mapping class group of an orientable surface*. Invent. Math. **84** (1986) 157–176.
- [48] P. DE LA HARPE – *Free groups in linear groups*. L’Ens. Math. **29** (1983) 129–144.
- [49] W. J. HARVEY – *Geometric structure of surface mapping class groups*. Dans “Homological group theory” (Proc. Sympos., Durham, 1977), pp. 255–269, London Math. Soc. Lect. Note Ser. **36**, Cambridge Univ. Press, 1979.
- [50] W. J. HARVEY – *Boundary structure of the modular group*. Dans “Riemann surfaces and related topics : Proc. 1978 Stony Brook Conf.”, I. Kra, B. Maskit eds., Ann. of Math. Stud. **97**, Princeton Univ. Press (1981) 245–251.
- [51] T. HATTORI – *Collapsing of quotient spaces of $\text{SO}(n) \backslash \text{SL}(n, \mathbf{R})$ at infinity*. J. Math. Soc. Japan **47** (1995) 193–225.
- [52] N. V. IVANOV – *Subgroups of Teichmüller modular groups*. Transl. Math. Mono. **115**, Amer. Math. Soc. (1992).
- [53] N. V. IVANOV – *Mapping class groups*. In “Handbook of Geometric Topology”, R. Daverman, R. Sher eds, Elsevier (2001) 523–633.
- [54] W. JACO – *Lectures on three-manifold topology*, Reg. Conf. Ser. Math. **43**, Amer. Math. Soc. 1980.
- [55] M. KAPOVICH – *Hyperbolic manifolds and discrete groups*. Prog. Math. **183**, Birkhäuser, 2001.
- [56] I. KAPOVICH, M. LUSTIG – *The actions of $\text{Out}(F_k)$ on the boundary of Outer space and on the space of currents : minimal sets and equivariant incompatibility*. Erg. Th. Dyn. Sys. **27** (2007) 827–847.

- [57] I. KAPOVICH, M. LUSTIG – *Geometric intersection number and analogues of the curve complex for free groups*. *Geom. & Topo.* **13** (2009) 1805–1833.
- [58] A. KATOK, B. HASSELBLATT – *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. *Ency. Math. App.* **54**, Camb. Univ. Press, 1995.
- [59] Y. KIDA – *Measure equivalence rigidity of the mapping class group*. *Ann. of Math.* **171** (2010) 1851–1901.
- [60] B. KLEINER, B. LEEB – *Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces of higher rank*. *Publ. Math. I. H. É. S.* **86** (1997) 115–197.
- [61] M. KORKMAZ, A. STIPSICZ – *Lefschetz fibrations on 4-manifolds*. *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. II, 271–296, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **13**, Eur. Math. Soc. 2009.
- [62] E. KOWALSKI – *The large sieve and its applications : arithmetic geometry, random walks and discrete groups*. *Camb. Tracts Math.* **175**, Cambridge Univ. Press, 2008.
- [63] G. LEVITT – *Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups*. *Geom. Dedicata* **114** (2004) 49–70.
- [64] G. LEVITT, M. LUSTIG – *Irreducible automorphisms of F_n have north-south dynamics on compactified outer space*. *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003) 59–72.
- [65] A. LUBOTZKY, S. MOZES, M. S. RAGHUNATHAN – *The word and Riemannian metrics on lattices of semisimple groups*. *Publ. Math. I. H. É. S.* **91** (2000) 5–53.
- [66] R. LYNDON, P. SCHUPP – *Combinatorial group theory*. *Ergeb. Math. Grenz.* **89**, Springer Verlag 1977.
- [67] R. MARTIN – *Non-uniquely ergodic foliations of thin type, measured currents and automorphisms of free groups*. *Thèse UCLA*, 1995.
- [68] H. MASUR, Y. MINSKY – *Geometry of the complex of curves I : Hyperbolicity*. *Invent. Math.* **138** (1999) 103–149.
- [69] J. MILNOR – *Introduction to algebraic K-theory*, *Ann. Math. Studies* **72**, Princeton Univ. Press, 1971.
- [70] E. MOISE – *Geometric topology in dimension 2 and 3*. Springer Verlag, 1977.
- [71] J. MORGAN, P. SHALEN – *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*. *Ann. of Math.* **127** (1988) 403–519.
- [72] S. NAG – *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, Wiley, 1988.
- [73] A. PAPADOPOULOS, G. THÉRET – *On Teichmüller’s metric and Thurston’s asymmetric metric on Teichmüller space*. *Handbook of Teichmüller theory*. Vol. I, pp. 111–204, IRMA Lect. Math. Theor. Phys. **11**, Eur. Math. Soc. 2007.
- [74] A. PARREAU – *Compactification d’espaces de représentations de groupes de type fini*. *Prépublication* 2010, [arXiv1003.1111](https://arxiv.org/abs/1003.1111).
- [75] F. PAULIN – *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*. *Invent. Math.* **94** (1988) 53–80.
- [76] F. PAULIN – *Action de groupes sur les arbres*. *Sém. Bourbaki* (1995/96), Exp. n° 808, *Astérisque* **241**, Soc. Math. France (1997) 97–137.

- [77] F. PAULIN – *Sur les automorphismes extérieurs des groupes hyperboliques*. Ann. Scien. Ec. Norm. Sup. **30** (1997) 147–167.
- [78] F. PAULIN – *Sur la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller*. Dans “Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités”, L. Bessières, A. Parreau, B. Remy eds (Actes de l'école d'été de l'Institut Fourier, Grenoble, 2004), Séminaires et Congrès **18**, Soc. Math. France (2009) 421–443.
- [79] V. POÉNARU – *Travaux de Thurston sur les difféomorphismes des surfaces et l'espace de Teichmüller*. Sémin. Bourbaki (1978/79), Exp. n° 529, Lecture Notes in Math. **770**, Springer Verlag (1980) 66–79.
- [80] I. RIVIN – *Walks on groups, counting reducible matrices, polynomials, and surface and free group automorphisms*. Duke Math. J. **142** (2008) 353–379.
- [81] I. SATAKE – *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*. Ann. of Math. **71** (1960) 77–110.
- [82] M. SCHARLEMANN – *Heegaard splittings of compact 3-manifolds*. “Handbook of geometric topology”, R. Daverman, R. Sherr eds, 921–953, North-Holland, 2002.
- [83] J. de SÉGUIER – *Sur les automorphismes de certains groupes*. Comptes Rendus Acad. Science **179** (1924) 139–142.
- [84] J.-P. SERRE – *Arbres, amalgames, SL_2* . Astérisque **46**, Soc. Math. France, 3ème éd. 1983.
- [85] J.-P. SERRE – *Lie algebras and Lie groups*. 2nde éd. Springer Verlag, 1992.
- [86] W. THURSTON – *Three-dimensional geometry and topology*. Princeton Math. Ser. **35**, Princeton Univ. Press, 1997.
- [87] K. VOGTMANN – *Automorphisms of free groups and Outer space*. Geom. Dedicata **94** (2002) 1–31.
- [88] K. VOGTMANN – *The cohomology of automorphism groups of free groups*. In “Proc. Inter. Cong. Math. Madrid 2006”, vol. II, European Math. Soc. (2006) 1101–1119.
- [89] G. VORONOI – *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*. J. reine angew. Math. **133** (1907) 97–178.
- [90] R.J. ZIMMER – *Ergodic theory and semisimple groups*. Birkhäuser, 1984.

Frédéric PAULIN

Ecole Normale Supérieure
DMA, UMR 8553 CNRS
45 rue d'Ulm

F-75230 PARIS Cédex 05
et

Université Paris-Sud 11
UMR 8628 CNRS, Bât. 425
Département de Mathématiques
F-91405 ORSAY Cédex

Mél : frederic.paulin@math.u-psud.fr